Anwendungen der klassischen S-Matrix Theorie auf elastische und inelastische Schwerionenstreuung

Inauguraldissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der

Freien Universität Berlin

Fachbereich Physik

vorgelegt von

Peter Kaufmann

aus Berlin

- April 1980 -

Anwendungen der klassischen S-Matrix Theorie auf elastische und inelastische Schwerionenstreuung

Inauguraldissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der

Freien Universität Berlin

Fachbereich Physik

vorgelegt von

Peter Kaufmann

aus Berlin

- April 1980 -

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Gutachter: Prof. Dr. J. Eichler
2. Gutachter: Prof. Dr. Ta-Chung Meng
Tag der mündlichen Prüfung:
Tag der Promotion: 18. JUNI 1980

Inhaltsverzeichnis

		Seite
	ZUSAMMENFASSUNG	1
1.	EINLEITUNG UND ÜBERSICHT	3
	1.1 Die elastische Streuung	3
	1.2 Die klassische S-Matrix (KSM)	4
	1.3 Die multiple Coulombanregung	8
	1.4 Kern- und Coulombanregung	12
2.	DIE ELASTISCHE STREUUNG SEHR SCHWERER SYSTEME	15
	2.1 Semiklassische Theorie und komplexe Trajektorien	15
	2.2 Die Topologie der Umkehrpunkte bei sehr schweren Systemen	21
	2.3 Die Analyse von experimentellen Wirkungsquerschnitten und Vergleich mit quantenmechanischen Rechnungen	26
	2.4 Diskussion und Schlußfolgerungen	34
3.	EINE INTEGRALDARSTELLUNG DER KLASSISCHEN S-MATRIX (KSM) ZUR BESCHREIBUNG MULTIPLER INELASTISCHER PROZESSE	38
	3.1 Die klassische S-Matrix als Integral über WKB-Wellenfunktionen	38
	3.2 Die kanonische Transformation auf elastische Bahnen	42
	3.3 Gültigkeitsgrenzen der Integraldarstellung	50
	3.3.1 Die Verletzung der Zeitumkehrinvarianz	50
	3.3.2 Kaustikberührungen in der Integraldarstellung	51
4.	DIE MULTIPLE COULOMBANREGUNG VON ROTATIONSZUSTÄNDEN IM"SUDDEN" GRENZFALL	54
	4.1 Die Bewegungsgleichungen	55
	4.2 Die klassische S-Matrix für die multiple Coulombanregung	60
	4.3 Ergebnisse und Zusammenfassung	70

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548910_0017

Seite

5. DIE MULTIPLE COULOMBANREGUNG VON ROTATIONS-ZUSTÄNDEN IN EINER "PLANAREN" NÄHERUNG 79
5.1 Die Bewegungsgleichungen für M=O 83
5.2 Die klassische S-Matrix für die planare Bewegung 86
5.3 Eine streuwinkelabhängige Amplitude in der klassischen S-Matrix zur Berücksichtigung des räumlichen Charakters des Streuprozesses 87
5.4 Ergebnisse mit der streuwinkelabhängigen Amplitude in der S-Matrix 95
5.4.1 Vergleich mit anderen Amplitudenfaktoren 95
5.4.2 Die Wahl der Quantisierung 100
5.4.3 Die Unitarität der klassischen S-Matrix 104
5.4.4 Die Güte von uniformer Airynäherung und Integraldarstellung 108
5.5 Die näherungsweise Berücksichtigung der nichtplanaren Bewegung 113
5.6 Die Ergebnisse mit der verbesserten klassischen S-Matrix 122
6. DIE SEMIKLASSISCHE BESCHREIBUNG VON KERN- UND COULOMBANREGUNGEN 130
6.1 Die Berücksichtigung des Realteils des Kernpotentials in dem semiklassischen Modell 131
6.2 Die störungstheoretische Mitnahme des Imaginärteils des Kernpotentials 134
6.3 Vergleich des semiklassischen Modells mit anderen Rechnungen und Experiment 138
7. ZUSAMMENFASSENDE DISKUSSION 143
ANHANG I DIE UNIFORME AIRYNÄHERUNG DER KLASSISCHEN S-MATRIX 152
I.1 Die uniforme Airynäherung für klassisch erlaubte Übergänge 152

Seite

I.2 Die uniforme Airynäherung für klassisch verbotene Übergänge 157

I.3 Die uniforme Airynäherung bei fast-elastischen Stößen 160

ANHANG II ANALYTISCHE RECHNUNGEN IM "SUDDEN" GRENZFALL 163

II.1 Die Lösung der Bewegungsgleichungen 163

II.2 Die Berechnung der Phase 165

II.3 Zum Vergleich mit der Alder-Winther Formulierung 168

II.4 Die Berechnung der Determinante 170

II.5 Der "sudden" Grenzfall für die planare Näherung 173

ANHANG III DIE LÖSUNG DER STABILITÄTSGLEICHUNGEN 177

LITERATURVERZEICHNIS 180

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit werden Anwendungen von semiklassischen Verfahren auf elastische und inelastische Schwerionenreaktionen diskutiert.

Im ersten Teil der Arbeit wird die semiklassische Beschreibung mit komplexen klassischen Bahnen so erweitert, daß auch die elastische Streuung sehr schwerer Systeme ohne Schwierigkeiten beschrieben werden kann. Es stellt sich heraus, daß die semiklassischen Resultate über viele Größenordnungen mit quantenmechanischen Resultaten und experimentellen Daten sehr gut übereinstimmen. Überdies ist das semiklassische Verfahren im Gegensatz zu quantenmechanischen Rechnungen für beliebig viele Partialwellen ohne weiteres anwendbar.

Der Hauptteil der Arbeit beschäftigt sich damit, die in der Molekülphysik entwickelte klassische S-Matrix Theorie so zu modifizieren, daß inelastische Schwerionenreaktionen beschrieben werden können, bei denen multiple Anregungen von Rotationszuständen auftreten. Zu diesem Zweck wird eine Integraldarstellung der klassischen S-Matrix abgeleitet, die durch eine korrekte Berücksichtigung der dabei auftretenden Funktionaldeterminante für nichtkartesische Koordinaten eine früher von Marcus angegebene Integraldarstellung verbessert.

Mit dieser Integraldarstellung wird die multiple Coulombanregung im "sudden" Grenzfall berechnet und mit quantenmechanischen Ergebnissen verglichen. Für leichte Systeme erhält man gute Resultate, während für schwere Systeme zu viele Kaustikberührungen auftreten. Diese führen zum Zusammenbruch der Integraldarstellung, wodurch die Grenzen der Anwendbarkeit der klassischen S-Matrix Theorie für Probleme mit zwei inneren Freiheitsgraden aufgezeigt werden.

Es wird deshalb ein Modell entwickelt, bei dem der wichtigere innere Freiheitsgrad der planaren Bewegung vollständig semiklassisch behandelt wird, während die weniger wich-

tige nichtplanare Bewegung nur in der Näherung des "sudden" Grenzfalls berücksichtigt wird. Mit diesem Modell ist es erstmals möglich im Rahmen der klassischen S-Matrix Theorie Winkelverteilungen multipler Anregungen mit geringem Aufwand zu berechnen und experimentelle Daten zu analysieren.

Im letzten Teil der Arbeit wird zur Berechnung von Coulomb- und Kernanregungen das komplexe Kernpotential in das semiklassische Modell mit einbezogen. Dabei wird der Imaginärteil des Kernpotentials allerdings nur störungstheoretisch behandelt. Der Vergleich von semiklassischen mit quantenmechanischen Resultaten und experimentellen Daten für ein leichtes System liefert deshalb keine vollständige quantitative Übereinstimmung, aber brauchbare Aussagen über Größenordnungen von Wirkungsquerschnitten. Das vorliegende Verfahren ist im Gegensatz zu quantenmechanischen Rechnungen für die qualitative Analyse ohne Schwierigkeiten auch auf schwere Schwerionensysteme anwendbar.

1. EINLEITUNG UND ÜBERSICHT

Die durch den Aufbau von Schwerionenbeschleunigern möglich werdenden Untersuchungen von Reaktionen mit immer schwereren Kernen hat ein verstärktes Interesse an klassischen und semiklassischen Methoden in der Kernphysik mit sich gebracht. Während es einerseits immer schwieriger wird, die Streuung von schweren Ionen streng quantenmechanisch zu beschreiben je komplexer die gestreuten Systeme werden, fördert andererseits das Auftreten von großen Massen, großen Quantenzahlen, hohen Energien etc die Anwendbarkeit klassischer oder semiklassischer Verfahren.

1.1. Die elastische Streuung

Das einfachste Beispiel dafür ist die Anwendung der - auf komplexe klassische Bahnen erweiterten - WKB-Näherung auf die Beschreibung der elastischen Streuung zweier Atomkerne. Die Ursache für die Notwendigkeit der Verwendung von komplexen Bahnen bei der Berechnung der WKB-Streuphasen ist das Auftreten eines komplexen optischen Kernpotentials, das die elastische Streuung von schweren Ionen bestimmt. Dabei ist die Erweiterung der WKB-Näherung auf komplexe Bahnen der wesentliche Schritt, der bewirkt, daß das semiklassische Verfahren eine sehr gute Annäherung an quantenmechanische Resultate liefert. Die Mitnahme von höheren Termen in einer Entwicklung nach $\hbar$ über die übliche WKB-Näherung hinaus ist für die Beschreibung der elastischen Schwerionenstreuung nicht wichtig.

In einer Reihe von Arbeiten wurde die elastische Streuung semiklassisch unter Verwendung von komplexen Bahnen beschrieben [1-8] . Allerdings wurde das Verfahren bisher nur auf die Streuung von α-Teilchen [7-8] und auf die Streuung von leichten schweren Ionen [z.B. $^{16}O+^{16}O$, $^{16}O+^{58}Ni$] angewendet [1-6] , wo höchstens 150 Partialwellen berücksichtigt werden müssen.

Das zweite Kapitel der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich damit, wie die semiklassische Methode auf die Beschreibung der elastischen Streuung sehr schwerer Systeme erweitert werden kann, wo unter Umständen mehr als 1000 Partialwellen wichtig sein können. In diesem Kapitel wird die Theorie zur Beschreibung der elastischen Streuung mit Hilfe von komplexen Bahnen im wesentlichen in der Form kurz dargestellt, in der sie in [3] entwickelt wurde.

Neu dabei ist die Diskussion, wie sich die Struktur der in der WKB-Näherung auftretenden Umkehrpunkte der klassischen Bahnen ändert, wenn man von leichten zu sehr schweren Systemen übergeht. Es wird gezeigt, daß eine Vereinfachung in der Topologie der Umkehrpunkte bei den sehr schweren Systemen , die hauptsächlich auf die starke Coulombabstoßung zurückzuführen ist, auf ein sehr leicht anwendbares Verfahren führt, das es gestattet elastische differentielle Wirkungsquerschnitte auch für die schwersten Systeme zu berechnen. Insbesondere wird diskutiert werden, wie die komplexen Wege im Fall der sehr schweren Systeme zu wählen sind.

Mit dem vorliegenden Verfahren wird dann eine Reihe von experimentell bestimmten Winkelverteilungen analysiert und es wird ein Vergleich mit streng quantenmechanischen Rechnungen durchgeführt, um die Genauigkeit der vorliegenden Theorie zu prüfen. Außerdem wird ein Kriterium dafür angegeben, für welche Schwerionensysteme die Methode leicht anwendbar ist. Verschiedene Ergebnisse der Theorie wurden bereits veröffentlicht [9-12] .

1.2. Die klassische S-Matrix (KSM)

Der über die elastische Streuung hinausgehende nächst komplizierte Schritt ist die störungstheoretische Beschreibung von inelastischer Streuung und Transferreaktionen in der Schwerionenphysik mit semiklassischen Methoden. Die

ersten Arbeiten [3,6,13] , die dafür komplexe Bahnen verwenden, führen diese Beschreibung im Rahmen der DWBA (Distorted Wave Born Approximation) durch, bei der sowohl für die inelastischen Reaktionen [3,6,13] als auch für die Einteilchentransferreaktionen [6] der Formfaktor entlang derjenigen komplexen Bahnen aufintegriert wird, welche die elastische Streuung bestimmen.

In der Atom- und Molekülphysik wurde für Streuprozesse eine semiklassische Theorie entwickelt [14-29] , die es gestattet über die Störungstheorie hinauszugehen und multiple Anregungsprozesse zu untersuchen. Diese Theorie ist eine Verallgemeinerung der WKB-Näherung auf Systeme mit mehreren inneren Freiheitsgraden und sie wird oft als klassische S-Matrix Theorie bezeichnet.

Die Theorie hat folgende wesentliche Züge.Eine Voraussetzung ist, daß alle betrachteten Freiheitsgrade klassischen (kollektiven) Charakter haben und somit das physikalische System eine klassische Hamiltonfunktion besitzt. Die Dynamik des Streuprozesses wird dann durch (numerische) Lösung der entsprechenden klassischen Bewegungsgleichungen exakt behandelt. Auf diese Weise wird die Rückkopplung der inneren Anregungen des Systems auf die Relativbewegug richtig beschrieben. Die Quantenmechanik kommt durch die Bildung einer S-Matrix ins Spiel, deren Phase sich als klassische Wirkungsfunktion ergibt; über die Unitarität der S-Matrix ist damit auch deren Amplitude festgelegt. In der Sprache der Reaktionstheorie entspricht die klassische S-Matrix (KSM) einer semiklassischen Beschreibung des Streuprozesses in einem Formalismus mit gekoppelten Kanälen. Die wichtigsten Darstellungen der KSM werden im folgenden als uniforme Näherung und als Integraldarstellung bezeichnet.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten die KSM aus der Quantenmechanik herzuleiten. Ein Weg hat seinen Ausgangspunkt in der Feynman`schen Formulierung der Quantenmecha-

nik mit Wegintegralen [30-35] . Betrachtet man dort den Limes $\hbar \to 0$ tragen nur noch die Wege mit extremaler Wirkung (stationäre Punkte in der Phase), also die klassischen Bahnen zwischen gegebenem Anfangszustand und gewünschtem Endzustand, zur S-Matrix bei. Die daraus resultierende KSM erhält man deshalb aus einer Näherung der stationären Phase an die Quantenmechanik. Ein bestimmtes S-Matrixelement schreibt sich dann als kohärente Summe über die Beiträge dieser wenigen stationären Bahnen

$$S = \sum_n A_n \exp\left[i \varphi_n\right] \qquad (1.1)$$

wo φ_n die klassische Wirkungsfunktion entlang der n-ten Bahn und A_n die zugehörige klassische Amplitude sind. Die kohärente Überlagerung der Beiträge der stationären Bahnen trägt dem quantenmechanischen Superpositionsprinzip Rechnung und gibt Anlaß zu Interferenzeffekten, durch welche, sofern sie wichtig sind, die semiklassische einer rein klassischen Beschreibung überlegen wird.

Ebenfalls zur obigen stationären Formulierung der KSM gelangt man über die Korrespondenz zwischen den unitären Transformationen der Quantenmechanik und den kanonischen Transformationen der klassischen Mechanik [25,29] . Letztere kann man durch die Näherung der stationären Phase an die unitären Transformationen bekommen. Die Korrespondenzrelation für die S-Matrix als spezieller unitärer Transformation [29] führt dann auf den Ausdruck (1.1).

Besondere Beachtung in der KSM erfordert die Behandlung der sogenannten Kaustikberührungen, die sich auf die Berechnung der Amplituden A_n in (1.1) auswirken. Kaustiken sind Einhüllende der klassischen Bahnen. Im Raum der Relativbewegung stellt beispielsweise die Fläche $p_r=0$ (p_r= Relativimpuls) eine Kaustik dar. Berührt eine klassische

Bahn zwischen Anfangs- und Endpunkt eine Kaustik, so muß im Beitrag dieser Bahn zur S-Matrix eine Zusatzphase berücksichtigt werden. Dieses Kaustikphasenproblem ist von Levit et al. 31-35 ausführlich diskutiert und für Darstellungen in kartesischen Koordinaten gelöst worden. Es ist nicht sicher, ob diese Vorschriften auf die übliche Darstellung der S-Matrix übertragbar sind, da diese im allgemeinen in Wirkungs- und Winkelvariablen formuliert ist. Allerdings wird üblicherweise der Analogieschluß für Kaustikphasen beim Übergang von kartesischen zu nichtkartesischen Koordinaten in semiklassischen Näherungen mit Erfolg angewendet (z.B. treten auch in der einfachen WKB-Wellenfunktion für die Relativbewegung Kaustikphasen auf, die in nichtkartesischen Koordinaten mathematisch nicht streng abgeleitet werden können).

Weiterhin ist in der Nähe der Kaustik die einfache Überlagerung (1.1) der Beiträge der stationären Bahnen keine gute Näherung mehr. Zwei oder mehr stationäre Punkte der Phase kommen dort sehr nahe zusammen (klassische Katastrophe) und es wird in diesen Fällen notwendig, sogenannte uniforme Näherungen,wie die Airynäherung [15,24] oder die Besselnäherung [20,23,24,78,79] , zu verwenden.

In Kapitel 3 dieser Arbeit werden wir einen anderen Weg [14-17] zur KSM einschlagen. Ausgangspunkt ist dabei die quantenmechanische Formulierung der S-Matrix als Skalarprodukt der ein- und auslaufenden Wellenfunktionen. Die quantenmechanischen Wellenfunktionen werden durch Wellenfunktionen angenähert, die in allen Freiheitsgraden einer WKB-Näherung entsprechen. Wir machen dann in den semiklassischen Wellenfunktionen eine kanonische Transformation [17] von den Orts- und Winkelvariablen auf eine "Zeit"variable und sogenannte reduzierte Winkelvariable. Dabei führt die Integration über die "Zeit"variable zur Abspaltung der energieerhaltenden δ-Funktion. Die verbleibende Integration über die reduzierten Win-

kelvariablen gibt schließlich eine Integraldarstellung der KSM, welche die Grundlage für die Anwendung in den weiteren Kapiteln ist.

Das auszuführende Integral über die reduzierten Winkelvariablen summiert nicht mehr einige wenige Beiträge von klassischen Bahnen zwischen gegebenem Anfangszustand und ausgesuchtem Endzustand auf, wie in der Näherung der stationären Phase, sondern summiert über die Beiträge aller klassischen Bahnen, die vom gegebenem Anfangszustand ausgehen. Die Integraldarstellung vermeidet also die mitunter umfangreiche Suche nach den stationären Punkten der Phase sowie die oft mühsam durchzuführenden uniformen Näherungen. Sie ist deshalb praktischer für Anwendungen als die uniformen Darstellungen, die man aus der Integraldarstellung durch Auswertung des Integrals über die reduzierten Winkelvariablen in der Näherung der stationären Phase erhält.

Am Schluß von Kapitel 3 werden wir zeigen, in welcher Weise sich Kaustikberührungen in der Integraldarstellung der KSM bemerkbar machen. Für die richtige Behandlung der Kaustikberührungen in der Integraldarstellung konnten bisher keine mathematischen Vorschriften angegeben werden. Dieses offene Problem muß für die Vermeidung der Näherung der stationären Phase an die Integraldarstellung in Kauf genommen werden.

1.3. Die multiple Coulombanregung

Eine erste Anwendung der KSM in der Kernphysik war, neben der Beschreibung von Spaltungsprozessen [36,37], die Berechnung der multiplen Coulombanregung von deformierten Kernen (angenähert durch einen starren Rotator) in Rückwärtsrichtung [30,38-42]. Die Beschränkung auf die Rückwärtsrichtung (Bahndrehimpuls L=0) führt dazu, daß neben der radialen Relativbewegung nur noch ein inne-

rer Freiheitsgrad (der Rotatorspin) auftritt.

Die mit der uniformen Airynäherung [30,38,39] und auch die mit einer Integraldarstellung [40-42] berechneten Anregungswahrscheinlichkeiten zeigen gute Übereinstimmung mit quantenmechanischen [30] und deBoer-Winther [43a] Rechnungen.

Eine Erweiterung des Spezialfalles der Rückwärtsstreuung auf alle Streuwinkel wurde im Rahmen der uniformen Näherungen von Fröbrich et al. [44] durchgeführt. Das ist ein Problem, wo neben der radialen Relativbewegung zwei innere Freiheitsgrade semiklassisch behandelt werden müssen. Es gelingt, die Anregungswahrscheinlichkeiten von klassisch erlaubten Übergängen zu berechnen und damit zu zeigen, daß auch mit zwei inneren Freiheitsgraden die multiple Coulombanregung eines starren Rotators mit einer uniformen Darstellung der KSM beschrieben werden kann.

Allerdings wird das semiklassische Verfahren für das Problem mit zwei inneren Freiheitsgraden bedeutend komplizierter und aufwendiger als für die Rückwärtsstreuung mit nur einem inneren Freiheitsgrad. Ein Grund dafür liegt in der Suche nach den stationären Punkten in zwei Dimensionen. Der andere wesentliche Grund besteht in der Notwendigkeit, wegen der auftretenden Kaustikberührungen von klassischen Bahnen zweidimensionale uniforme Näherungen zu verwenden. Dabei macht der Einbau der richtigen Kaust in die sehr komplizierte uniforme Besselnäherung, die für periodische Probleme besser geeignet ist als die uniforme Airynäherung, erhebliche Schwierigkeiten. Der notwendige Aufwand wird schließlich so groß, daß die Methode für Anwendungen auch auf kompliziertere Probleme (z.B. klassisch verbotene Übergänge,komplexe Potentiale) als praktisch ungeeignet erscheint.

In Kapitel 4 der vorliegenden Arbeit werden wir zur Vermeidung der oben geschilderten Schwierigkeiten als

Alternative zur uniformen Darstellung die in Kapitel 3 entwickelte Integraldarstellung der KSM für die Beschreibung der multiplen Coulombanregung bei beliebigen Streuwinkeln untersuchen. Allerdings haben Rechnungen mit der vollen Dynamik bereits gezeigt, daß in einer (J,L)-Darstellung der S-Matrix die Integraldarstellung wegen der Vielzahl von Kaustikberührungen scheitert [45] . Das führt uns dazu in Kapitel 4 in einer (J,m)-Darstellung der S-Matrix (m=Projektion von J auf die Einfallsachse) nur den "sudden" Grenzfall zu diskutieren, bei dem die innere Anregung nicht auf die Relativbewegung zurückkoppelt und alle Ausdrücke im Integranden der Integraldarstellung analytisch behandelt werden können. Im "sudden" Grenzfall sollten wegen der eingeschränkten Dynamik weniger Kaustikberührungen auftreten. Außerdem sollte er auf Grund der analytischen Ausdrücke im Integranden eine Diskussion über die richtige Behandlung von Kaustikberührungen in der Intergraldarstellung erleichtern.
Wir vergleichen die Integraldarstellung mit der exakten quantenmechanischen Lösung im "sudden" Grenzfall und untersuchen insbesondere das Auftreten von Kaustikberührungen als Funktion der Stärke der Monopol-Quadrupolwechselwirkung. Man findet, daß die Integraldarstellung für leichte Systeme gute Resultate liefert, während sie bei schweren Systemen (große Kopplungsstärke,viele Kaustikberührungen), in denen die multiplen Effekte erst wichtig werden, versagt. Es gelingt uns nicht eine Vorschrift zur Behandlung der Kaustikberührungen anzugeben.

Wir ziehen aus den Ergebnissen von Kapitel 4 den Schluß, daß auch die Integraldarstellung für die Beschreibung der multiplen Coulombanregung eines starren Rotators nicht geeignet ist. Will man deshalb für das Problem der multiplen Coulombanregung dennoch im Rahmen der KSM ein praktikables Verfahren entwickeln, ist man gezwungen weitere Näherungen einzuführen.

In Kapitel 5 werden wir daher eine Näherung an die Beschreibung der multiplen Coulombanregung von Rotationszuständen für beliebige Streuwinkel entwickeln, die nur einen inneren Freiheitsgrad vollständig semiklassisch behandelt. Für diesen bezüglich der inneren Freiheitsgrade eindimensionalen Fall können uniforme Näherungen einfach angewendet werden und es zeigt sich, daß auch die Integraldarstellung ihre Gültigkeit behält, da es zu keinen Kaustikberührungen klassischer Bahnen kommt.

Eine vernünftige Wahl für den einen semiklassisch voll zu behandelnden Freiheitsgrad ist die Wahl der planaren Bewegung des Streusystems, da diese den weitaus größten Beitrag zur Anregung des starren Rotators liefert. Als am besten geeignete Darstellung der S-Matrix für unsere planare Näherung erweist sich die Helizitätsdarstellung (die Helizität M ist die Projektion des Rotatorspins J auf die Verbindungsachse zwischen Projektil und Target). In der Helizitätsdarstellung führt die planare Bewegung stets zu klassischen Bahnen mit der Helizität M=O , so daß der Freiheitsgrad der planaren Bewegung gerade durch den Freiheitsgrad des Rotatorspins J beschrieben wird.

Zur genäherten Beschreibung des räumlichen Charakters des Streuprozesses auch bei Beschränkung auf die planare Dynamik führen wir eine Streuwinkelabhängige Amplitude ein. Diese bewirkt, daß man für die Winkelverteilungen von den Anregungswahrscheinlichkeiten des starren Rotators bereits eine brauchbare Übereinstimmung von unserem semiklassischen Modell mit quantenmechanischen Rechnungen im Formalismus der gekoppelten Kanäle [46] und mit deBoer-Winther Rechnungen erzielt.

Die noch verbliebenden Unterschiede zwischen den semiklassischen und den quantenmechanischen Rechnungen (bzw. den deBoer-Winther Rechnungen) kann man durch eine genäherte Behandlung der nichtplanaren Bewegung weiter verringern. Zu diesem Zweck korrigieren wir unsere plana-

re Näherung auf den exakten quantenmechanischen "sudden" Grenzfall. Die nichtplanare Bewegung kann dann als geschlossener analytischer Ausdruck näherungsweise behandelt werden, wodurch die Wirkung der streuwinkelabhängigen Amplitude ergänzt wird.

Unser Modell besteht somit darin, die planare Bewegung, die den Hauptbeitrag zur Anregung des starren Rotators liefert, semiklassisch exakt zu behandeln und die weniger wichtige nichtplanare Bewegung in der Näherung des "sudden" Grenzfalls zu berücksichtigen.

Am Schluß von Kapitel 5 werden wir die mit unserem Modell berechneten Winkelverteilungen der Anregungswahrscheinlichkeiten von Rotationszuständen deformierter Kerne bei Energien unterhalb der Coulombbarriere mit quantenmechanischen Rechnungen im Formalismus der gekoppelten Kanäle, mit Experimenten und mit deBoer-Winther Rechnungen vergleichen.

Hauptresultat von Kapitel 5 ist die Möglichkeit erstmals im Rahmen der klassischen S-Matrix Theorie Winkelverteilungen von multiplen Anregungen mit geringem Aufwand zu berechnen. Das Verfahren ist auch auf sehr schwere Systeme anwendbar und nicht beschränkt in der Zahl der zu berücksichtigenden Kanäle des starren Rotators.

1.4. Kern- und Coulombanregung

Inzwischen gibt es eine Reihe von Streuexperimenten von schweren Ionen an deformierten Kernen, bei denen die Einschußenergien im Bereich der Coulombbarriere liegen [61-64] . In diesen Experimenten war es durch hochauflösende Spektrometer möglich die Grundzustandsbanden der Streupartner aufzulösen. Dadurch kann man im Bereich der Coulombbarriere die Überlagerung von Coulombpotential und Kernpotential experimentell studieren und somit Eigen-

schaften des Kernpotentials an der Kernoberfläche bestimmen. Die Analyse der Experimente zeigt, daß eine Beschreibung mit DWBA in diesen Fällen nicht ausreicht, da insbesondere die Anregung der kollektiven Zustände durch die langreichweitige Coulombwechselwirkung sehr stark ist und Anlaß zu mehrstufigen Prozessen gibt.

Die im Prinzip geeignete Theorie , um derartige Verhältnisse theoretisch beschreiben zu können, ist die quantenmechanische Theorie der gekoppelten Kanäle. Diese Theorie wurde zur Analyse von Experimenten [61-63] verwendet, ist aber aus praktischen Gründen (Speicherplatz im Computer) auf die Mitnahme einiger weniger Kanäle beschränkt und nur auf leichte Systeme anwendbar. Die in naher Zukunft zu erwartenden Experimente bei schwereren Systemen mit der Auflösung auch höherer angeregter Zustände erfordern eine Beschreibung, die die gegenwärtigen Möglichkeiten der quantenmechanischen Theorie mit gekoppelten Kanälen übersteigt.

Hier bietet sich unser in Kapitel 5 entwickeltes semiklassisches Modell für die Beschreibung multipler Coulombanregungen eines starren Rotators an. Durch die Hinzunahme eines Kernpotentials sollte es mit diesem Modell grundsätzlich möglich sein die multiplen Kernanregungen zu beschreiben. Damit besteht die Möglichkeit mit unserem semiklassischen Modell über den Anwendungsbereich existierender Theorien hinauszugehen (anders als bei der Beschreibung der multiplen Coulombanregung) und bisher nicht behandelbare kernphysikalische Prozesse zu analysieren.

In Kapitel 6 werden die durch das Kernpotential notwendigen Änderungen des Modells gegenüber der reinen multiplen Coulombanregung diskutiert. Dabei wird als weitere wesentliche Näherung eingehen, daß nur das reelle Kernpotential voll in den semiklassischen Formalismus eingebaut wird, während die Wirkung des imaginären Anteils

des Kernpotentials lediglich als Dämpfungsfaktor störungstheoretisch in die S-Matrix eingebaut wird, indem es längs der reellen Bahnen aufintegriert wird.

Am Schluß des Kapitels werden wir unsere Näherung mit experimentellen Daten und quantenmechanischen Rechnungen im Formalismus der gekoppelten Kanäle vergleichen.

Das abschließende Kapitel 7 enthält eine Zusammenfassung und Wertung aller Ergebnisse der vorliegenden Arbeit.

2. DIE ELASTISCHE STREUUNG SEHR SCHWERER SYSTEME

2.1. Semiklassische Theorie und komplexe Trajektorien

Als Ausgangspunkt für die Untersuchung der elastischen Streuung sehr schwerer Systeme soll in diesem Abschnitt die semiklassische Theorie und die Einführung von komplexen Trajektorien im wesentlichen in der in [3] entwickelten Form dargestellt werden, wo allerdings nur leichte Systeme ($O^{16}+Ni^{58}$) betrachtet worden sind. In den folgenden Abschnitten wird die Methode so erweitert, daß sehr schwere Systeme einfach behandelt werden können; es werden experimentelle Winkelverteilungen für derartige Systeme analysiert und Vergleiche mit quantenmechanischen Rechnungen durchgeführt, um die Genauigkeit der Methode zu testen.
Die elastische Streuung schwerer Ionen wird durch folgende Hamiltonfunktion bestimmt

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{Z_P Z_T e^2}{r} + V_N + iW_N \quad . \tag{2.1}$$

Hier sind p der radiale Impuls, L der Bahndrehimpuls, μ die reduzierte Masse sowie $Z_P e$ und $Z_T e$ die Ladung von Projektil und Target. Es ist ausreichend, eine punktförmige Ladungsverteilung anzunehmen. Wir beschränken unsere Diskussion auf Kernpotentiale, bei denen Realteil V_N (Parameter: V_o, a_R, r_R) und Imaginärteil W_N (W_o, a_I, r_I) vom Woods-Saxon Typ sind. Die Streuamplitude erhält man als Summe über die Beiträge aller wichtigen Partialwellen

$$f(\Omega) = \frac{1}{2ik} \sum_{L=0}^{L_{max}} (2L+1)\, P_L(\cos\theta)\, e^{i\phi_c^L} \cdot (e^{i\phi_N^L} - 1) + f_{Cb}(\Omega) \tag{2.2}$$

und den differentiellen Wirkungsquerschnitt aus

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f(\Omega) \right|^2 \quad . \tag{2.3}$$

Hier sind ϕ_c^L (6.13) die Coulombstreuphasen, ϕ_N^L die Kernstreuphasen und $f_{Cb}(\Omega)$ (6.14) die exakte Coulombstreuamplitude für Punktladungen. Für L_{max} gilt die Abschätzung

$$L_{max} \approx L_{gr} = R_o \sqrt{2\mu E_{cm}} \quad , \tag{2.4}$$

wobei L_{gr} der Grazingdrehimpuls, R_o der Kernradius und E_{cm} die Energie im Schwerpunktsystem sind. Partialwellen mit größerem Bahndrehimpuls spüren vom Kernpotential nichts mehr und tragen zur Summe in (2.2) nichts bei.

Die Streuphasen ϕ^L werden in WKB-Näherung als klassische Wirkungsfunktion für jeden Bahndrehimpuls berechnet. Im allgemeinen muß eine einlaufende WKB-Wellenfunktion um jeden Umkehrpunkt (Verzweigungspunkt der WKB-Wellenfunktion) analytisch fortgesetzt werden. Die kohärente Aufsummation der Beiträge aller Zweige der analytischen Fortsetzung liefert dann die auslaufende WKB-Wellenfunktion. Wir werden allerdings mehrfache analytische Fortsetzungen um Umkehrpunkte ("reflection series", [2]) wegen ihrer unbedeutenden Beiträge zur WKB-Wellenfunktion vernachlässigen. Eine Streuphase ϕ^L berechnet sich somit durch einmalige analytische Fortsetzung um einen der vorhandenen Umkehrpunkte und man erhält ihren asymptotischen Wert durch Integration entlang einer komplexen Bahn, die bei $r \to \infty$, $t \to -\infty$ beginnt, zum Umkehrpunkt ($p=0$) führt, ihn umläuft (der Umkehrpunkt liegt im allgemeinen nicht auf der Bahn) und bei $r \to \infty$, $t \to \infty$ endet. Vereinfacht ausgedrückt erhält man so den Beitrag eines Umkehrpunktes zur S-Matrix. Alle komplexen Bahnen, die denselben Umkehrpunkt umlaufen und keine Pole umrunden, liefern denselben Wert für die Phase ϕ^L.

Man gewinnt die Streuphasen aus der numerischen Integration klassischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \; , \quad \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial r} \; , \quad \frac{d\phi^{L}}{dt} = - r \frac{dp}{dt} \tag{2.5}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\text{Re } p = - \sqrt{2 \mu E_{cm}} \quad , \quad \text{Im } p = 0 \; ,$$

$$\text{Re } r = R \text{ (groß)} \; , \; \text{Im } r = r_I^o \text{ (abhängig von der physikalischen Situation).} \tag{2.6}$$

Alle Größen in (2.5) (also auch alle klassischen Trajektorien) werden wegen des imaginären Anteils des Kernpotentials komplex. Das ist der entscheidende Fortschritt in der WKB-Näherung, die durch Lösen der exakten Bewegungsgleichungen im Komplexen eine nichtstörungstheoretische Behandlung des imaginären Kernpotentials gestattet. Damit geht man über ältere Arbeiten [47,48] hinaus, die reelle Trajektorien verwenden, welche nur durch den Realteil des Kernpotentials bestimmt sind und die bei der Berechnung der Streuphasen den Einfluß des imaginären Potentials nur störungstheoretisch berücksichtigen, indem das imaginäre Potential längs der reellen Trajektorien aufintegriert wird.

Bei der Berechnung der Trajektorien ist die Wahl der Anfangsbedingungen (2.6) von größter Wichtigkeit. Es muß gewährleistet werden, daß die Trajektorien die physikalisch relevanten Umkehrpunkte umlaufen und keine Polstellen des Potentials von ihnen eingeschlossen werden. Grundsätzlich könnte man jede Anfangsbedingung für die Trajektorien wählen, wenn man eine komplexe Zeit einführt. Dann liegt das Problem darin, den richtigen Pfad in der komplexen Zeitebene zu suchen. Wir halten es jedoch für vorteilhaft, sich auf reelle Zeiten zu beschränken und damit komplexe Pfade im Ortsraum zu verwenden, wie das andere Autoren [3-8] gemacht haben. Im Falle von leichten schweren Ionen muß man sehr sorgfältig in der Wahl der Anfangsbedingung für Im r sein; es ist nicht erlaubt, Im r = 0

für alle Bahndrehimpulse zu setzen. Um das genauer zu verstehen, muß man die Verteilung der Umkehrpunkte und Potentialsingularitäten in der komplexen Ebene diskutieren. Betrachten wir als Beispiel für ein leichtes System etwa die Streuung von α-Teilchen an ^{40}Ca [7,8,49] .Hätte man nur ein reelles Potential,so würden für eine feste Partialwelle maximal drei Umkehrpunkte auftreten, die auf der reellen Achse liegen (Abb.1) und durch

$$E_{cm} = V_{eff} \equiv \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{Z_P Z_T e^2}{r} + V_N \qquad (2.7)$$

gegeben sind. Das Anschalten des imaginären Anteils vom Kernpotential bewirkt, daß die Umkehrpunkte in die komplexe Ebene geschoben werden. Für jede Trajektorie, die durch den Bahndrehimpuls L charakterisiert ist, entstehen so drei Umkehrpunkte in der komplexen r-Ebene; d.h es treten als Funktion von L drei Umkehrpunktzweige in der komplexen r-Ebene auf. In Abbildung 2 sind neben den Umkehrpunktzweigen für das obige System auch die beiden der reellen Achse am nächsten liegenden Pole des Woods-Saxon Potentials eingezeichnet. Es existieren unendlich viele solche Pole, die bei $r = R_R + i(2n+1)a_R$ und bei $r = R_I + i(2n+1)a_I$ $(n=-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots,\infty)$ liegen. Außerdem gibt es für jedes L in der Umgebung von jedem Pol einen weiteren Umkehrpunkt; man hat also unendlich viele Umkehrpunktzweige. Im Prinzip müßte man für jedes L die Beiträge aller Umkehrpunkte zur S-Matrix aufsummieren. Allerdings stellt sich heraus, daß nur die drei der reellen Achse am nächsten liegenden Umkehrpunktzweige einen physikalisch relevanten Beitrag liefern. Die anderen Umkehrpunkte liegen zuweit entfernt von der reellen Achse und die zugehörigen Beiträge für die S-Matrix werden weggedämpft. Eine eingehende Diskussion der Verhältnisse findet man in [1,2].

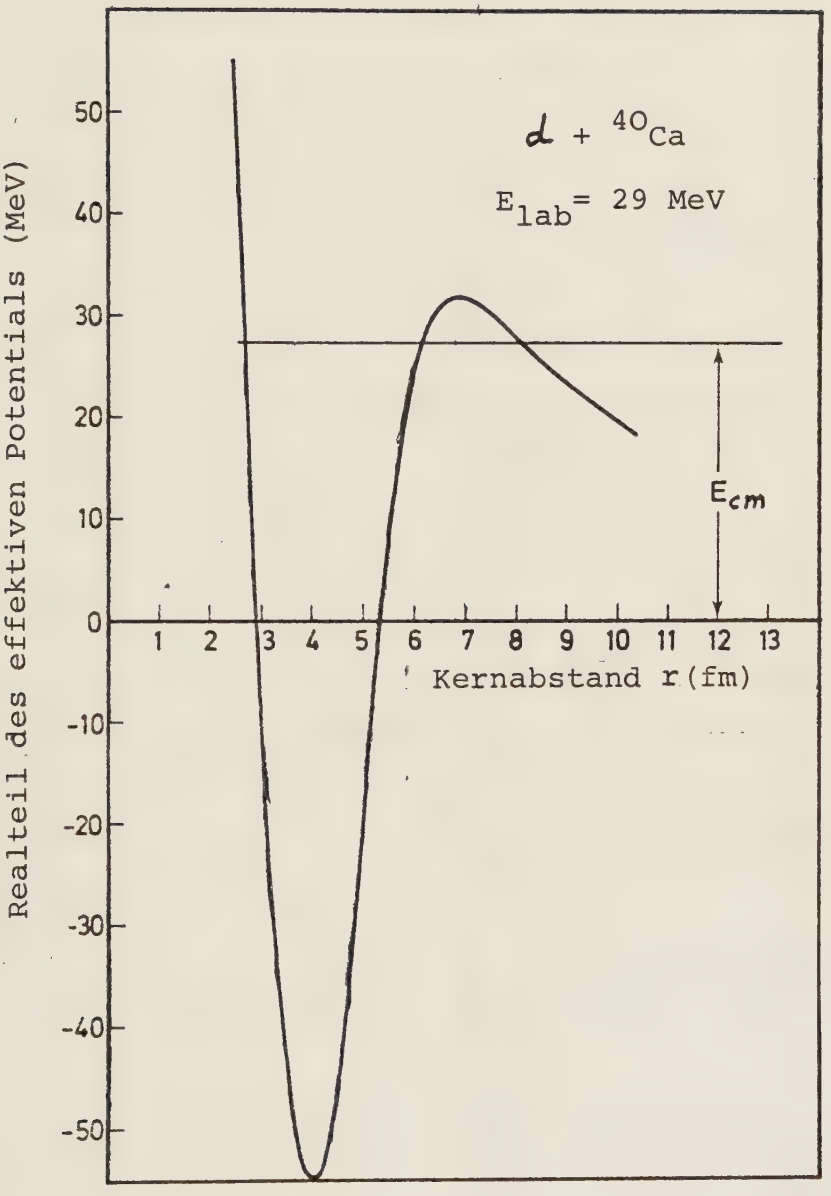

Abbildung 1 : Der Realteil des effektiven Potentials für das leichte System $\alpha + {}^{40}Ca$, E_{lab}=29 MeV, aus Rev. [7].

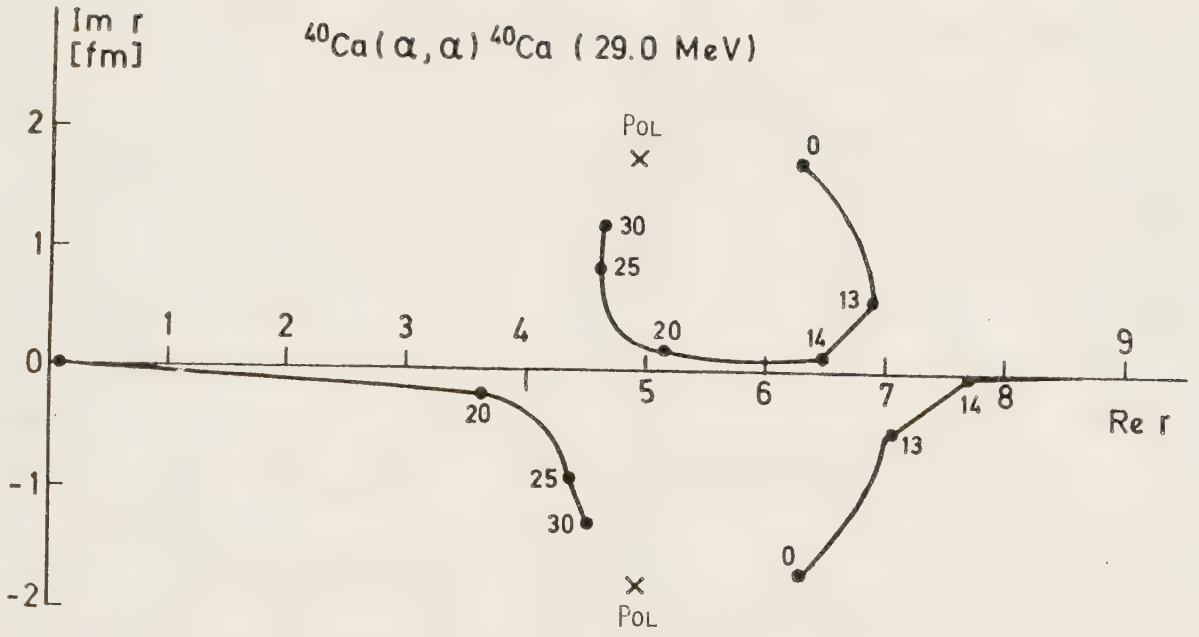

Abbildung 2 : Die drei wichtigen Umkehrpunktzweige für das leichte System $\alpha + {}^{40}Ca, E_{lab}=29$ MeV, aus Rev.[7].

Während im sehr leichten System $\alpha + {}^{40}Ca, E_{lab}=29MeV$ noch drei Umkehrpunktzweige zum Wirkungsquerschnitt beitragen, reduziert sich dies in leichten schweren Systemen, wo üblicherweise angenommen wird, daß die reellen Potentiale flacher und die Absorption stärker wird, auf einen Umkehrpunktzweig. So gibt für das System ${}^{16}O+{}^{58}Ni$, $E_{lab}=60MeV$ der äußere Zweig der Umkehrpunkte bereits den alleinigen Beitrag zum Wirkungsquerschnitt [3,7] . Die starke Coulombabstoßung,die den klassisch erlaubten Bereich weiter nach außen schiebt, und das imaginäre Kernpotential mit seiner Absorptionswirkung führen dazu, daß die Beiträge der weiter innen liegenden Umkehrpunkte zum Wirkungsquerscnitt völlig weggedämpft werden. Der äußere Zweig der Umkehrpunkte liegt in diesem System allerdings sehr nahe am ersten Pol des Woods-Saxon Potentials in der unteren Halbebene. Man muß daher mit der Anfangsbedingung (2.6) achtgeben. Es ist nicht möglich für alle Bahndrehimpulse Im r = 0 zu wählen, da dann einige Trajektorien diesen Pol umlaufen und falsche Phasenbeiträge aufsammeln. In solchen Fällen muß der Anfangswert der Trajektorien so in die komplexe Ebene verschoben werden, daß die Trajektorien die relevanten Umkehrpunkte umlaufen ohne einen Pol zu umrunden. Das macht die Automatisierung eines Computerprogramms recht schwierig.
Im nächsten Abschnitt werden wir die Verhältnisse bei der Streuung sehr schwerer Systeme diskutieren [9-12]

2.2 Die Topologie der Umkehrpunkte bei sehr schweren Systemen

Im Fall sehr schwerer Systeme,bei denen die Coulombabstoßung sehr stark anwächst und wo man üblicherweise relativ flache Kernpotentiale annimmt [50-53] , vereinfacht sich die Situation im Vergleich zu den leichten Systemen beträchtlich. Eine typische Verteilung der Umkehrpunkte für ein sehr schweres System (${}^{136}_{54}Xe + {}^{208}_{82}Pb, E_{lab}=1120MeV$)

wird in Abbildung 3 gezeigt. Die Veränderung der Topologie der Umkehrpunkte in Abbildung 3 gegenüber Abbildung 2 kann als Folge der stark zunehmenden Coulombabstoßung verstanden werden. Diese schiebt die zwei inneren Umkehrpunktzweige weg von der reellen Achse in die komplexe Ebene. Der Verlauf des dritten (äußeren) Umkehrpunktzweiges wird vor allem durch das Coulombpotential bestimmt. Er bleibt auf der reellen Achse bzw. wird durch das imaginäre Kernpotential im Kerninnern etwas in die komplexe Ebene verschoben. Im Einzelnen ändert sich die Verteilung der Umkehrpunkte folgendermaßen: Der Umkehrpunktzweig in der oberen Halbebene zieht sich mit wachsendem Coulombpotential um den ersten Pol des Woods-Saxon Potentials zusammen. Die beiden unteren Zweige der Umkehrpunkte nähern sich einander mit zunehmender Coulombenergie, verbinden sich bei einer bestimmten Energie und brechen dann wieder in zwei Zweige auf, wobei jeder neue Zweig aus je einem Stück der beiden alten Zweige besteht. Mit weiter wachsender Coulombabstoßung zieht sich schließlich einer der neuen Zweige um den ersten Pol des Woods-Saxon Potentials in der unteren Halbebene zusammen; der andere neue Zweig bleibt in der Nähe der reellen Achse. Dieser Zweig ist für die schweren Systeme der physikalisch wichtige und trägt allein noch zum Wirkungsquerschnitt bei.

Die Eigenschaften der komplexen Trajektorien, die zum richtigen elastischen Wirkungsquerschnitt für sehr schwere Systeme führen, lassen sich folgendermaßen zusammenfassen. Da alle wichtigen Umkehrpunkte in der Nähe der reellen Achse bleiben, ist es im Gegensatz zu leichten Systemen stets möglich, die Anfangswerte Im r = 0 bei großen Re r zu wählen, d.h. alle Trajektorien starten auf der reellen Achse. In Abbildung 3 wird als Beispiel eine Bahn mit L=350 gezeigt (Bahn 1). Sie beginnt weit außerhalb des Wechselwirkungsgebietes auf der reellen Achse, geht langsam in die komplexe Ebene, umrundet den wichtigen Umkehrpunkt und läuft innerhalb der ersten Pole des Woods-Saxon Potentials wieder hinaus. Die Bahnen für alle anderen

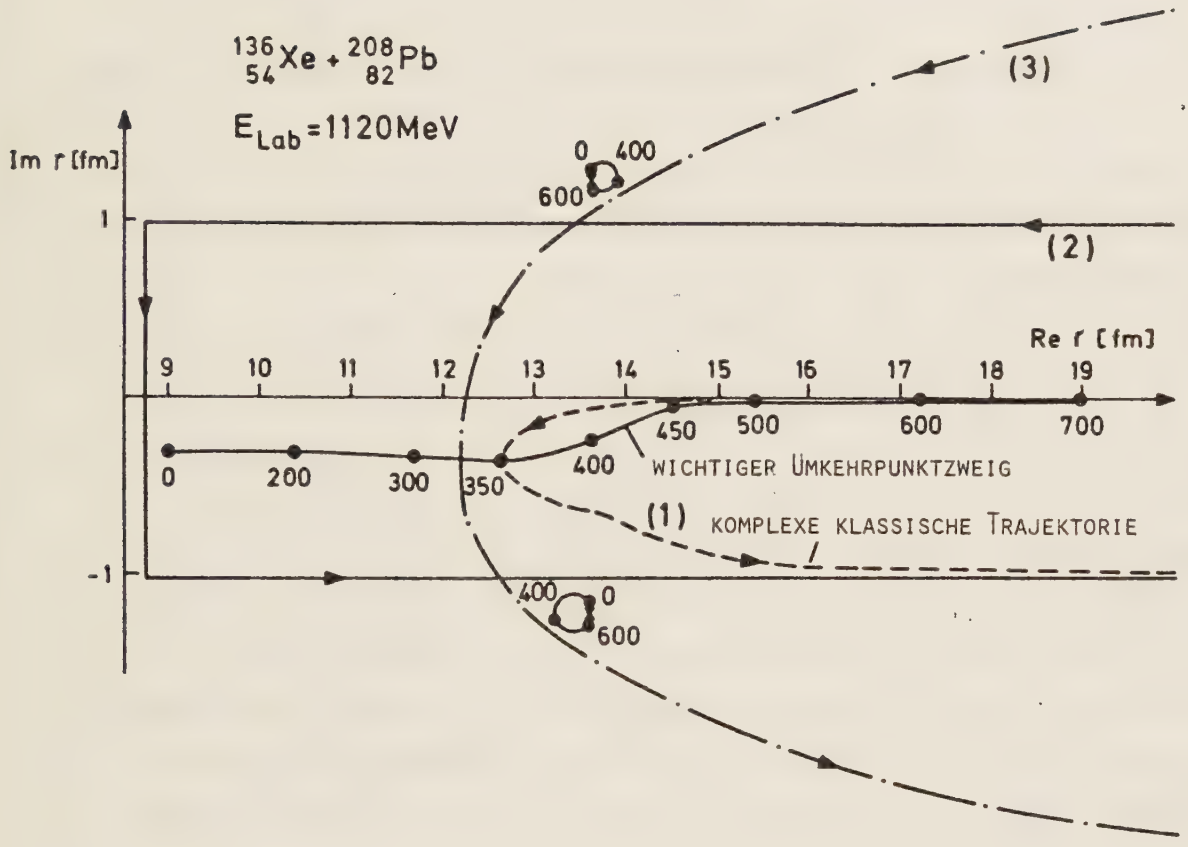

Abbildung 3 : Der Umkehrpunktzweig für das sehr schwere System $^{136}Xe+^{208}Pb, E_{lab}$=1120 MeV. Die Kreuze kennzeichnen die ersten Pole des Woods-Saxon Potentials. Bahn 1 ist eine zulässige klassische Bahn für L=350 mit der Randbedingung Im r=0 bei großen Re r. Die klassische Bahn kann deformiert werden solange sie keinen Pol umrundet (Bahn 2). Bahn 3 ist eine unzulässige klassische Bahn (Im r=3.4 bei großen Re r), da sie den ersten Pol des Woods-Saxon Potentials in der unteren Halbebene umrundet.

L-Werte zeigen das gleich Verhalten. Keine Trajektorie umläuft einen Pol. Da für alle Trajektorien dieselbe Anfangsbedingung (Im r = O) gewählt werden kann, wird die Automatisierung eines Rechenprogramms stark vereinfacht. In Abbildung 3 zeigen wir weiterhin ein Beispiel für eine unzulässige Trajektorie (Bahn 3) für L=350,die Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen mit Im r = 3.4 bei großen Re r ist. Diese Trajektorie umläuft den ersten Pol in der unteren Halbebene und führt deshalb zu falschen Ergebnissen.

An Stelle des soeben geschilderten Verfahrens kann man wegen des Cauchy-Satzes (die klassische Wirkungsfunktion ist ein komplexes Wegintegral) die Trajektorien in der komplexen Ebene beliebig verschieben, solange sie nicht über Singularitäten geschoben werden. Die Trajektorien müssen nicht Lösungen der klassischen Bewegungsgleichungen sein, sondern man kann stattdessen über den Energiesatz die klassische Wirkungsfunktion für alle L=Werte entlang desselben geradlinigen Pfades berechnen (Bahn 2), der den jeweils wichtigen Umkehrpunkt umläuft ohne einen Pol zu umrunden. Dies ist für leichte Systeme auch in [6] diskutiert worden.

Die im nächsten Abschnitt diskutierte Analyse von experimentellen Daten zeigt, daß es ausreicht bei der Berechnung der Wirkungsquerschitte die Beiträge des Umkehrpunktzweiges zu berücksichtigen, welcher der reellen Achse am nächsten liegt; die Beiträge der Umkehrpunkte, die um die Singularitäten konzentriert sind, können vernachlässigt werden. Bei sehr schweren Systemen wird die Anfangsbedingung Im r = O gewählt. Bei mittelschweren Systemen ($^{40}Ar+^{209}Bi$) ist es von Vorteil für große Re r den Anfangswert Im r_L gleich dem Imaginärteil des vorangehenden Umkehrpunktes zu wählen.Dies garantiert,daß die Trajektorien innerhalb der ersten Pole des Woods-Saxon Potentials bleiben.

Hier sollen noch einige technische Einzelheiten erwähnt werden. Aus numerischen Gründen ist es vorteilhaft bei allen Integrationen den Coulombanteil abzuziehen, d.h.

die Gleichungen für $\bar{r}=r-r_c$, $\bar{p}=p-p_c$ und $\phi_N^L = \phi^L - \phi_c^L$ (c=Coulomb) zu integrieren und am Schluß die exakten Werte r_c, p_c und ϕ_c^L wieder zu addieren. Dies ist besonders einfach in der hyperbolischen Parametrisierung

$$r_c = a_o\ (1 + \varepsilon \cosh w)\ ,\ t = \frac{a_o}{v_1}\ (\varepsilon \sinh w + w) \qquad (2.8)$$

der Coulombbahnen, wo v_1 die Geschwindigkeit des einlaufenden Teilchens, a_o der halbe "Abstand der kleinsten Annäherung"

$$a_o = \frac{Z_P Z_T\ e^2}{\mu\ v_1^2}\ , \qquad (2.9)$$

ε die Exzentrizität

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{L^2}{\eta^2}} \qquad (2.10)$$

und

$$\eta = \frac{Z_P Z_T\ e^2}{\hbar\ v_1} \qquad (2.11)$$

der Sommerfeldparameter sind.

Der divergente Teil der Coulombphase kann weggelassen werden, da er von L unabhängig ist und deshalb in die S-Matrix nur als konstante Phase eingeht. Die numerischen Integrationen werden von w=-7 bis w=+7 durchgeführt.

Weiter vereinfacht sich die Rechnung dadurch, daß alle Phasen recht glatte Funktionen des Bahndrehimpulses sind. Daher ist es nicht nötig, die Trajektorien und Phasen für alle Partialwellen zu berechnen, sondern es ist ausreichend alle Größen zwischen angemessenen L-Interval-

len zu interpolieren. Das führt dazu, daß das semiklassische Computerprogramm im allgemeinen schneller ist als ein vergleichbarer quantenmechanischer Code, insbesondere dann, wenn eine große Anzahl Partialwellen benötigt werden.

2.3. Die Analyse von experimentellen Wirkungsquerschnitten und Vergleich mit quantenmechanischen Rechnungen

Wir haben das obige Verfahren für die Analyse einer Reihe experimentell beobachteter Wirkungsquerschnitte verwendet, für die auch quantenmechanische optische Modellrechnungen vorliegen. Als ein erstes typisches Beispiel wählen wir wieder das System

$$^{136}Xe + ^{208}Pb \ , \ E_{lab} = 1120 \text{ MeV}$$

dessen Umkehrpunktstruktur oben diskutiert worden ist. Dieses System ist von Vandenbosch et al. [50] gemessen und mit einem optischen Potential analysiert worden. Während der Vergleich der Reflextionskoeffizienten kleine Abweichungen unserer Werte von den quantenmechanischen Werten zeigt (Abb. 4), ist die Übereinstimmung der Wirkungsquerschnitte über vier Größenordnungen sehr gut (Abb. 5). In den Tabellen 1 und 2 werden die Zahlenwerte der semiklassisch berechneten Reflextionskoeffizienten und der Winkelverteilung im Vergleich zu den quantenmechanischen Resultaten angegeben, da insbesondere die logarithmische Auftragung der Winkelverteilung in Abbildung 5 keine Unterscheidung der semiklassischen und quantenmechanischen Kurven zuläßt.
Ähnlich gute Übereinstimmung haben wir für folgende Reaktionen erzielt, die ebenfalls experimentell beobachtet worden sind

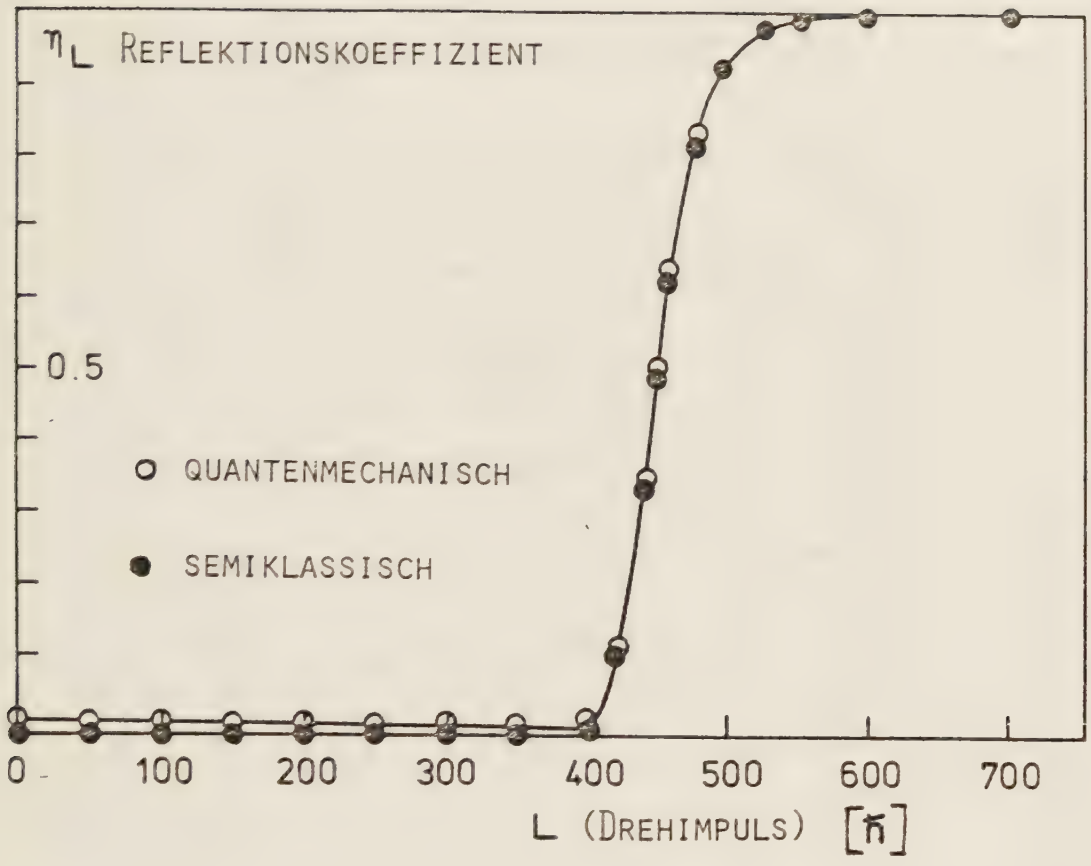

Abbildung 4 : Quantenmechanische und semiklassische Reflektionskoeffizienten für das sehr schwere System $^{136}Xe+^{208}Pb, E_{lab}=1120$ MeV.

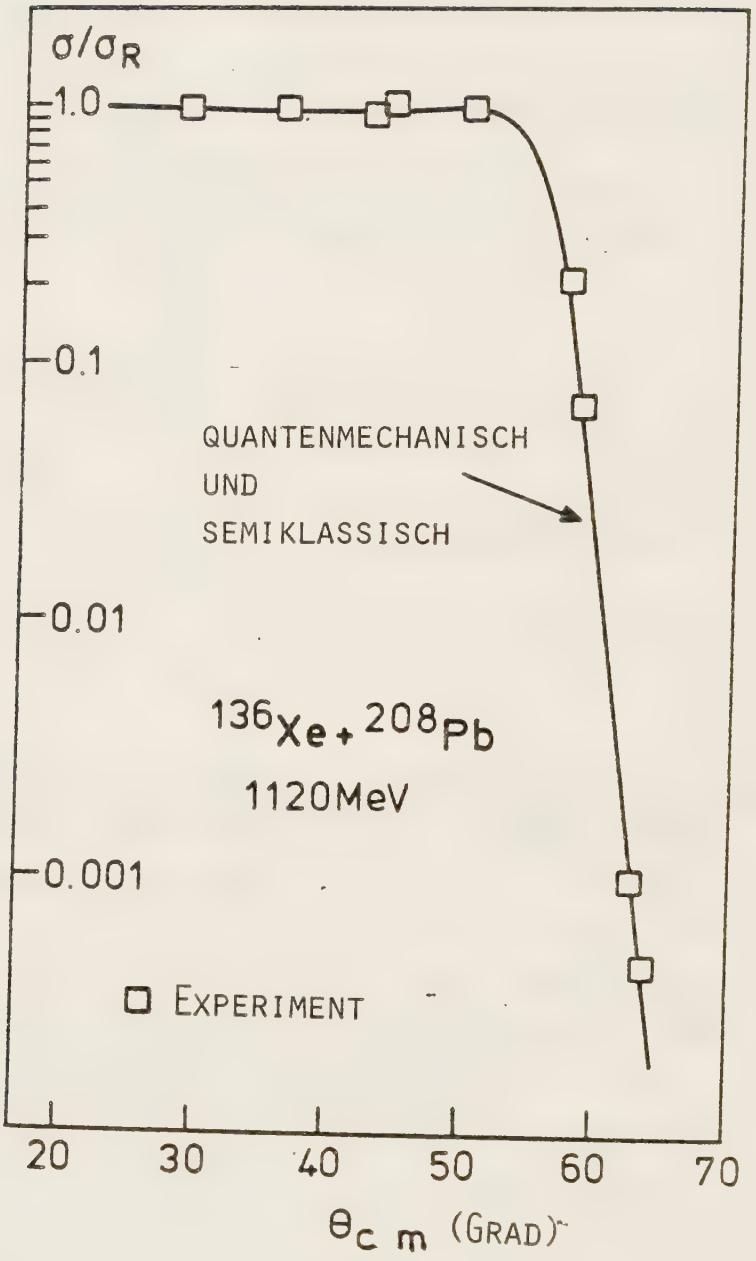

Abbildung 5 : Vergleich des quantenmechanischen und des semiklassischen Wirkungsquerschnittes mit experimentellen Daten (aus [50]) für das gleiche System wie in Abb.4.

Bahn-drehimpuls L	Reflextionskoeffizient $\eta(L)$	
	quantenmechanisch	semiklassisch
400	0.0111	0.0096
420	0.0996	0.0924
430	0.2068	0.1955
440	0.3483	0.3354
450	0.4993	0.4871
460	0.6364	0.6258
470	0.7459	0.7377
480	0.8275	0.8214
490	0.8850	0.8807
500	0.9242	0.9213
520	0.9678	0.9662
550	0.9913	0.9907
600	0.9991	0.9990

Tabelle 1 : Die quantenmechanischen und semiklassischen Reflextionskoeffizienten für das System $^{136}Xe+^{208}Pb, E_{lab}=1120$ MeV.

Θ_{cm} (Grad)	$\sigma(\Theta)/\sigma_R(\Theta)$ quantenmechanisch	$\sigma(\Theta)/\sigma_R(\Theta)$ semiklassisch
40	1.0025	1.0015
45	1.0089	1.0090
50	1.0202	1.0187
52	0.9136	0.9149
54	0.5347	0.5376
56	0.1895	0.1909
58	0.0433	0.0436
60	0.0068	0.0069
62	0.0008	0.0008

Tabelle 2 : Die quantenmechanischen und semiklassischen Wirkungsquerschnitte für das System $^{136}Xe+^{208}Pb, E_{lab}=1120$ MeV.

$^{84}Kr + ^{208}Pb$, E_{lab} = 494 MeV , [51]

$^{136}Xe + ^{209}Bi$, E_{lab} = 1130 MeV , [52]

$^{40}Ar + ^{209}Bi$, E_{lab} = 340 MeV , [53]

$^{84}Kr + ^{209}Bi$, E_{lab} = 712 MeV , [53] .

Die berechneten und gemessenen Winkelverteilungen sind in Abbildung 6 dargestellt; quantenmechanische und semiklassische Rechnungen fallen auf die gleichen Kurven. In Tabelle 3 sind die Parameter der Woods-Saxon Potentiale aufgeführt, die bei der Analyse der verschiedenen Reaktionen verwendet worden sind.
Die obigen Beispiele sind auch mit gewöhnlichen Fresnelformeln analysiert worden, die aber keine gute Übereinstimmung liefern [51-53] . Es sollte erwähnt werden, daß Frahn [54,55] mittlerweile die Fresnelformel zur Anwendung auf schwere Systeme modifiziert hat und die experimentellen Winkelverteilungen ebenfalls sehr gut wiedergeben kann.
Um die Anwendbarkeit unserer Methode auch für sehr große Partialwellen zu zeigen, haben wir den Wirkungsquerschnitt für das System

$^{84}Kr + ^{209}Bi$

bis zur zehnfachen Energie der Coulombbarriere ($E_{Cb} \approx$ 533 MeV) untersucht. Die Übereinstimmung zwischen Quantenmechanik und Semiklassik ist wiederum sehr gut für E_{lab} = 600 MeV (die Experimente sind aus [53]) und $E_{cm} = 2\ E_{Cb}$. Bei Energien von $E_{cm} = 5\ E_{Cb}$ und $E_{cm} = 10\ E_{Cb}$ scheiterte der uns zur Verfügung stehende Code für die quantenmechanische optische Modell-Rechnung, da zu hohe Partialwellen berücksichtigt werden müssen. Das semiklassische Computerprogramm hat dagegen

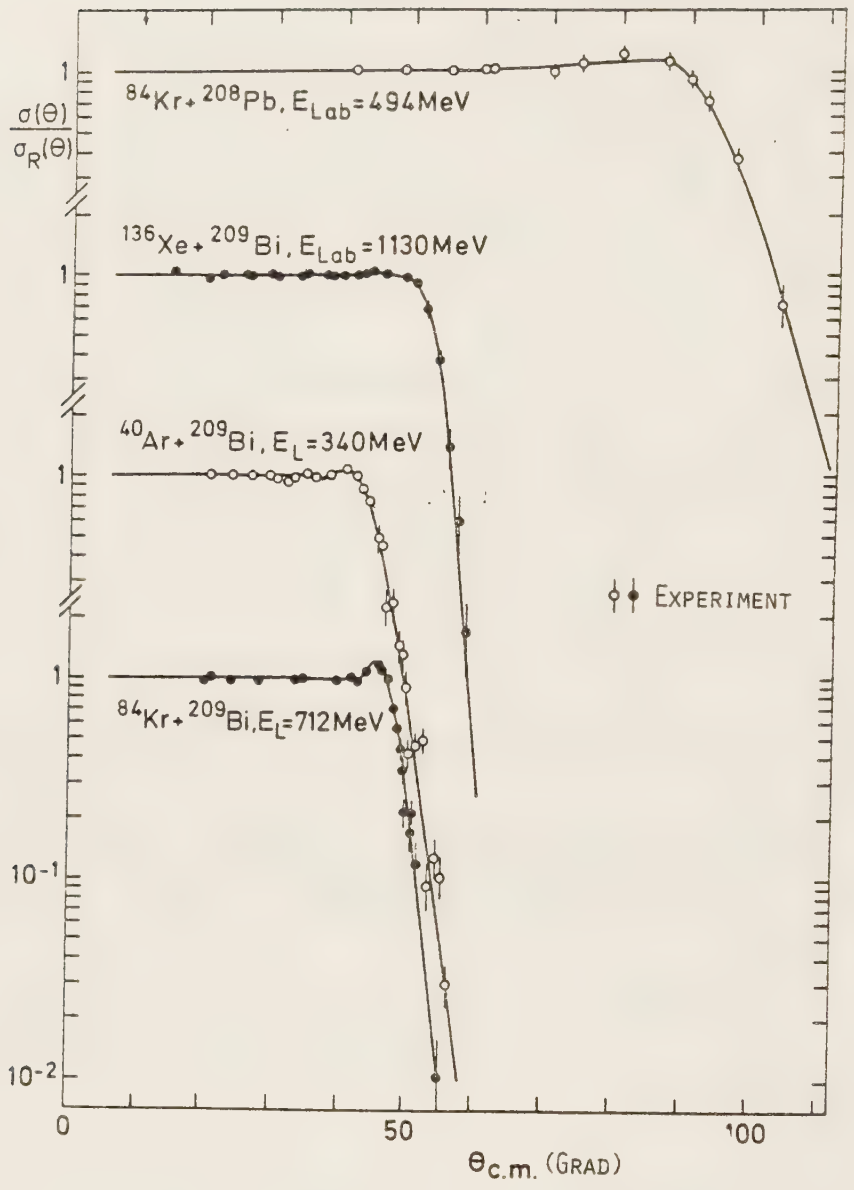

Abbildung 6 : Vergleich der theoretischen und der experimentellen Winkelverteilungen. Quantenmechanische und semiklassische Rechnungen fallen auf die gleichen Kurven. Parameter siehe Tabelle 3.

System	Ref.	E_{lab}(MeV)	V_o	a_R	r_R	W_o	a_I	r_I
$^{136}Xe + ^{208}Pb$	[50]	1120	30.0	0.6	1.195	25.0	0.4	1.235
$^{84}Kr + ^{208}Pb$	[51]	494	50.0	1.1	1.178	2.5	0.33	1.282
$^{136}Xe + ^{209}Bi$	[52]	1130	8.47	0.44	1.3	6.95	0.44	1.3
$^{40}Ar + ^{209}Bi$	[53]	340	68.0	0.54	1.167	83.9	0.54	1.167
$^{84}Kr + ^{209}Bi$	[53]	712	7.68	0.217	1.344	10.0	0.217	1.344
$^{84}Kr + ^{209}Bi$	[53]	600	7.68	0.217	1.344	10.0	0.217	1.344

Tabelle 3 : Parameter der Woods-Saxon Potentiale für die untersuchten Systeme.

mit der Berechnung der Winkelverteilungen selbst bei sehr hohen Einschußenergien keinerlei Schwierigkeiten (Abb. 7). Wie erwartet, treten bei den hohen Energien in den Winkelverteilungen Strukturen auf, die von der Fraunhoferstreuung her bekannt sind. Diese Oszillationen sind real, da sich bei Mitnahme von 3000 statt 2000 Partialwellen keine Änderung zeigt.

2.4. Diskussion und Schlußfolgerungen

Sowohl die obigen Ergebnisse als auch unsere Erfahrungen mit einer Reihe anderer Beispiele zeigen, daß die semiklassische Methode in einfacher Form (keine Umrundung der Pole, nur ein Umkehrpunkt ist wichtig, Im r = 0 als Anfangsbedingung) immer dann angewendet werden kann, wenn im Realteil des effektiven Potentials (2.7) bei der Energie des Projektils und im Bereich der wichtigen Drehimpulse keine "Potentialtaschen" vorhanden sind, d.h. (2.7) nur eine relle Lösung besitzt. Wie oben diskutiert wurde, sind dann für einen bestimmten Drehimpuls alle Umkehrpunkte bis auf einen relativ weit in die komplexe Ebene hineingeschoben. Vorausgesetzt werden muß noch, daß das imaginäre Kernpotential nicht zu tief ist, damit die Trajektorien nicht zu weit in die komplexe Ebene gezogen werden und doch noch einen Pol umlaufen. Ebenso darf die Diffuseness von W_N nicht wesentlich kleiner als die des Realteils sein, damit der erste Pol des imaginären Potentials genügend weit von der reellen Achse entfernt liegt. Die Topologie der Umkehrpunkte ist dann die von Abbildung 3 .

Man kann folgendes Kriterium dafür angeben, welche Systeme mit dem semiklassischen Verfahren einfach beschrieben werden können. Wenn das effektive Potential (2.7) keine "Taschen" besitzt, hat die Ableitung von (2.7) nach r keine Nullstellen. Daraus erhält man die Relation

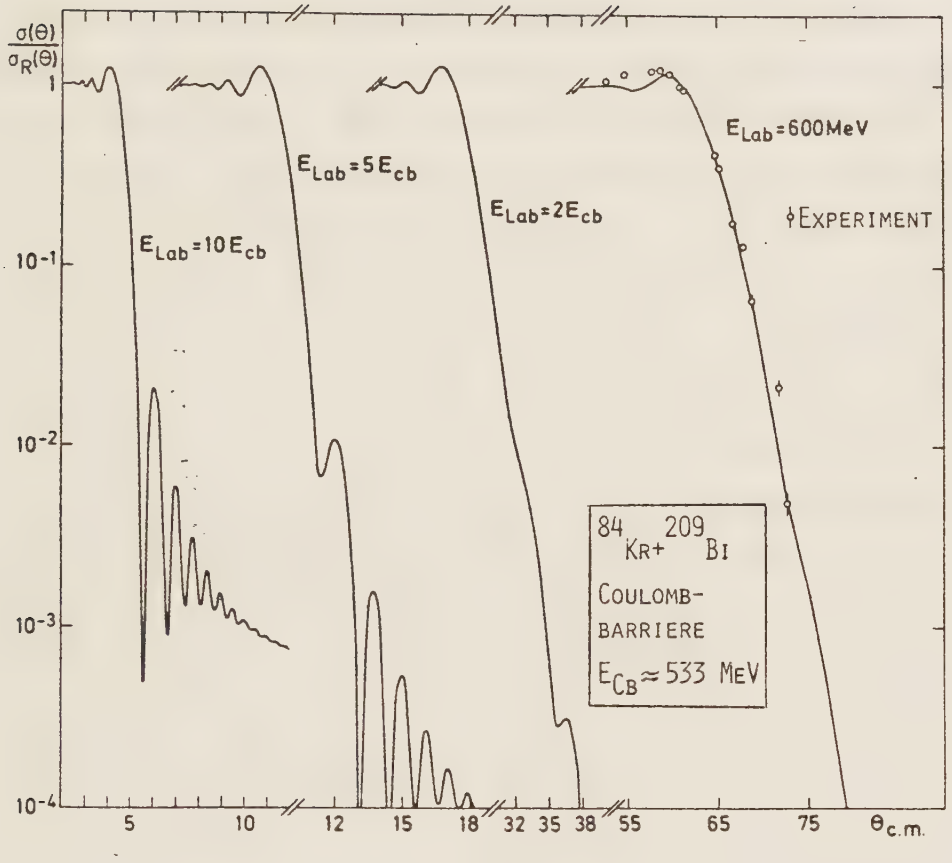

Abbildung 7 : Der elastische Wirkungsquerschnitt des Systems $^{84}Kr+^{209}Bi$ für die Energien E_{lab}=600 MeV, $2 \cdot E_{Cb}$, $5 \cdot E_{Cb}$ und $10 \cdot E_{Cb}$ (Energie der Coulombbarriere $E_{Cb} \approx 533$ MeV). Für die beiden höchsten Energien ist nur die semiklassische Rechnung durchführbar. Für alle Energien sind die gleichen Parameter wie für E_{lab}=600 MeV (siehe Tab.3) verwendet worden.

$$\frac{V_o}{4a_R} < \frac{Z_p Z_T e^2}{R_o^2} + \frac{L_{min}^2}{\mu R_o^3} \quad . \tag{2.12}$$

Hier ist $r \approx R_o$ angenommen, L_{min} ist der Drehimpuls der Partialwelle, bei der der Reflektionskoeffizient sich drastisch von Null weg ändert. L_{min} kann grob als $(L_{gr} - \Delta)$ geschrieben werden, wo Δ so etwas wie die Diffuseness des Reflektionskoeffizienten ist ($\Delta \ll L_{gr}$). Die Ungleichung (2.12) schreibt sich dann

$$\frac{V_o}{4a_R} < \left[E_{Cb} + 2 \cdot E_{cm} \left[1 - \frac{\Delta}{L_{gr}} \right]^2 \right] \cdot \frac{1}{R_o} \quad . \tag{2.13}$$

Diese Ungleichung ist für alle von uns oben untersuchten Systeme erfüllt, da die Kernpotentiale flach und die Coulombpotentiale stark sind. Allgemein wird die Ungleichung bei allen sehr schweren Systemen mit beliebigen Einschußenergien erfüllt, sofern das Kernpotential flach und die Diffuseness groß genug ist. Dies kann auch von der topologischen Struktur her verstanden werden, da die Pole mit wachsender Diffuseness sich von der reellen Achse entfernen und so die Möglichkeit sinkt, daß Trajektorien die Pole umrunden. Mit der Ungleichung kann man verstehen, daß bei leichten Systemen mit niedriger Coulombbarriere und tiefem Kernpotential die Topologie der Umkehrpunkte bei hohen Energien ähnlich aussieht wie bei sehr schweren Systemen. Daher ist die einfache semiklassische Methode (nur ein Umkehrpunkt ist wichtig, alle Trajektorien können mit Im r = 0 starten) auch auf leichte Systeme mit hohen Energien anwendbar. Die Änderung in der Topologie der Umkehrpunkte bei α-Teilchenstreuung mit wachsender Energie und die Anwendung einer Ein-Umkehrpunkt-Näherung ist bereits in [7] diskutiert worden.

Nach unserer Meinung ist die vorliegende Beschreibung der von Knoll und Schaeffer [1,2] aus numerischen Gründen vorzuziehen,wenn Winkelverteilungen für alle Streuwinkel berechnet werden sollen. Der Grund liegt darin, daß Knoll und Schaeffer für jeden Streuwinkel eine Suche nach stationären Trajektorien durchführen müssen, was numerisch unbequem ist, obwohl das Verfahren den anschaulichen Vorteil hat zu zeigen, welche Trajektorien zu einem bestimmten Streuwinkel führen.
Wir schließen die Behandlung der elastischen Streuung sehr schwerer Systeme mit der Bemerkung ab, daß das oben behandelte semiklassische Verfahren sehr leicht anwendbar ist und daß es geeignet ist, experimentelle Daten quantitativ sehr gut zu beschreiben. Die semiklassische Methode ist insbesondere dann den üblichen quantenmechanischen Programmen überlegen, wenn sehr viele Partialwellen berücksichtigt werden müssen, d.h. bei sehr schweren Systemen und hohen Einschußenergien.

3. EINE INTEGRALDARSTELLUNG DER KLASSISCHEN S-MATRIX (KSM) ZUR BESCHREIBUNG MULTIPLER INELASTISCHER PROZESSE

In diesem Kapitel werden wir anknüpfend an Marcus [14-17] eine Integraldarstellung der KSM ableiten, in der neben der Relativbewegung auch die inneren Freiheitsgrade des vorliegenden Streusystems semiklassisch behandelt werden. Die sich ergebende Darstellung der S-Matrix wird die Grundlage sein für die in den späteren Kapiteln behandelten Anwendungen der KSM auf inelastische Schwerionenstreuung unterhalb und oberhalb der Coulombbarriere.

Wir beginnen mit einer Formulierung der S-Matrix in Orts- und Winkelvariablen und führen anschließend eine kanonische Transformation durch ("uniformization with elastic trajectories", [17]),die nach einer Näherung bewirkt, daß eine analytische Integration die energieerhaltende δ-Funktion von der S-Matrix abspaltet und nur noch über die verbleibenden "reduzierten" Winkelvariablen der inneren Anregung integriert werden muß.

Am Schluß des vorliegenden Kapitels werden wir die Gültigkeitsgrenzen der Integraldarstellung diskutieren. Neben einer Diskussion über die Verletzung der Zeitumkehrinvarianz werden wir zeigen, in welcher Weise sich Kaustikberührungen der klassischen Bahnen (siehe Einleitung) in der Integraldarstellung der KSM bemerkbar machen.

3.1. Die klassische S-Matrix als Integral über WKB-Wellenfunktionen

Wir betrachten die Streuung von zwei Teilchen, wobei die Stoßpartner zu inneren Anregungen fähig sein sollen. Dieses Stoßsystem soll durch den Relativabstand r zwischen beiden Stoßpartnern und durch einen Satz von Winkelvariablen q beschrieben werden. Als Voraussetzung für eine

sinnvolle semiklassische Beschreibung wollen wir annehmen, daß die Winkelvariablen q kollektive Freiheitsgrade beschreiben.
In quantenmechanischer Formulierung lautet die S-Matrix

$$S_{J_2 J_1}\ \delta(E_2-E_1) = \int \psi^{(-)*}(r,q;J_2,E_2)\ \psi^{(+)}(r,q;J_1,E_1) \times r^2\ D(q)\ dr\ dq\ . \tag{3.1}$$

$\psi^{(+)}(r,q;J_1,E_1)$ ist eine die gesamte Wechselwirkung enthaltende Wellenfunktion, die als Randbedingung im Eingangskanal eine ebene Welle mit der Energie E_1 und den Quantenzahlen J_1 darstellt. $\psi^{(-)}(r,q;J_2,E_2)$ ist eine entsprechende Wellenfunktion, deren Randbedingungen E_2 und J_2 im Ausgangskanal festgelegt sind. (r^2 D(q) dr dq) ist das Volumenelement in den gewählten Koordinaten.

Die exakten quantenmechanischen Wellenfunktionen werden nun durch WKB-Funktionen approximiert. Für die einlaufende Wellenfunktion $\psi^{(+)}$ machen wir den Ansatz

$$\psi^{(+)}(r,q;J_1,E_1) = A(r,q;J_1,E_1)\ \exp(i\,\bar{\Phi}(r,q;J_1,E_1))\,. \tag{3.2}$$

Setzt man (3.2) in die Schrödingergleichung ein und ordnet nach Potenzen von $\hbar$, so erhält man in niedrigster Ordnung von $\hbar$ die Phase $\bar{\Phi}$ als die klassische Wirkungsfunktion. Diese ist Lösung der Hamilton-Jacobi Differentialgleichung

$$H_o\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial q},r\right) + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial r}\right)^2 + V(r,q) = E_1\ , \tag{3.3}$$

wo H_o die freie Hamiltonfunktion und V das Wechselwir-

wirkungspotential sind. Mit der Einführung der zu r und q kanonisch konjugierten klassischen Impulsvariablen p und J

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{3.4}$$

$$J = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \quad , \tag{3.5}$$

die zusammen mit r und q die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen erfüllen, erhält man daraus für die Phase der Wellenfunktion (3.2)

$$\Phi(r,q;J_1,E_1) = \frac{1}{\hbar}\int_{1}^{r} p\, dr' + \frac{1}{\hbar}\int_{1}^{q} J\, dq' + \frac{1}{\hbar} J_1\, q_1 + \frac{1}{\hbar} p_1\, r_1 - \eta \ln\left[\frac{2}{\hbar} p_1 r_1 + \frac{2}{a_o} r_1 - 2\right] . \tag{3.6}$$

Wir wollen dabei bereits hier annehmen, daß zwischen den beiden Stoßpartnern neben anderen im Moment noch nicht spezifizierten Wechselwirkungen ein Coulombpotential vorhanden ist. Der Logarithmusterm in (3.6) bedeutet dann den Abzug des bahndrehimpulsunabhängigen divergenten Teils der Coulombphase an der unteren Grenze von $\int p dr$. η ist der Sommerfeldparameter (2.11) und a_o ist der "halbe Abstand der kleinsten Annäherung"(2.9). Alle Variablen mit dem Index "1" in (3.6) beziehen sich auf den asymptotischen Bereich des Eingangskanals (Randwerte des Eingangskanals), der so gewählt ist, daß nur noch das langreichweitige Coulombpotential wirkt und die übrigen Wechselwirkungen keine Rolle mehr spielen.

Die Amplitude $A(r,q;J_1,E_1)$ erhält man mit Argumenten der Flußerhaltung [14-16] . Vor und hinter dem Wechselwirkungsbereich muß der Strom durch die Flächenelemente senkrecht zur r-Richtung gleich sein

$$A^2(r,q;J_1,E_1)\ v\ r^2\ D(q)\ dq = A^2(r_1,q_1;J_1,E_1)\ v_1 \times r_1^2\ D(q_1)\ dq_1 \ . \tag{3.7}$$

Hier ist v die Relativgeschwindigkeit im Punkt (r,q).

Vor der Streuung sind alle q_1 gleich wahrscheinlich und die Amplitude ist unabhängig von q_1. Normiert man den Strom im Eingangskanal auf Eins, folgt dann

$$A^2(r_1,q_1;J_1,E_1)\ v_1\ r_1^2\ N_1 = 1 \tag{3.8}$$

mit

$$N_1 = \int D(q_1)\ dq_1 \ , \tag{3.9}$$

wobei das Integral über alle q_1 ausgeführt wird. Für die Amplitude im Punkt (r,q) erhält man damit aus (3.7)

$$A(r,q;J_1,E_1) = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{D(q_1)}{v\ N_1\ D(q)}}\cdot\sqrt{\frac{\partial q_1}{\partial q}} \ . \tag{3.10}$$

Diese Amplitude unterscheidet sich von der von Marcus [14-16] angegebenen durch den Wurzelfaktor $\sqrt{D(q_1)/D(q)}$. Dieser drückt die Tatsache aus, daß r und q im allgemeinen nichtkartesische Koordinaten darstellen. Sowohl bei der Ableitung der Amplitude als auch bei der Bildung des Volumenelements im Integral (3.1) setzt Marcus [14-16] die Funktion D(q) als Teil der Funktionaldeterminante stets gleich Eins. Daß er die so gewonnenen Ausdrücke auf krummlinige Koordinaten anwendet ist nicht gerechtfertigt.

Die Wellenfunktion $\psi^{(-)}$ erhält man analog als

$$\psi^{(-)}(r,q;J_2,E_2) = A(r,q;J_2,E_2)\ \exp(i\cdot \Phi(r,q;J_2,E_2)) \qquad (3.11)$$

mit

$$A(r,q;J_2,E_2) = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{D(q_2)}{v\ N_2\ D(q)}}\cdot\sqrt{\frac{\partial q_2}{\partial q}} \qquad (3.12)$$

und

$$\Phi(r,q;J_2,E_2) = \frac{1}{\hbar}\int_2^r p\ dr' + \frac{1}{\hbar}\int_2^q J\ dq' + \frac{1}{\hbar}J_2\ q_2 + \frac{1}{\hbar}p_2\cdot r_2 - \eta_2 \ln\left[\frac{2}{\hbar}p_2 r_2 + \frac{2}{a_{o2}}\cdot r_2 - 2\right]. \qquad (3.13)$$

Dabei bezeichnet der Index "2" die Größen im asymptotischen Bereich des Ausgangskanals (Randwerte des Ausgangskanals). Die Parameter η_2 und a_{o2} sind mit der Relativgeschwindigkeit v_2 des Ausgangskanals berechnet; die entsprechenden Parameter ohne Index beziehen sich stets auf den Eingangskanal.

3.2. Die kanonische Transformation auf elastische Bahnen

Die aus $\psi^{(+)}$(3.2) und $\psi^{(-)}$(3.11) gebildete S-Matrix (3.1) ist durch einen recht unbefriedigenden Ausdruck dargestellt. Es fehlt auf der rechten Seite von (3.1) die explizite Herausnahme der energieerhaltenden δ-Funktion. Um dies zu erreichen, wird eine kanonische Transformation von (r,q) nach $(\tau,\bar{q})$ ("uniformization with elastic trajectories", [17]) durchgeführt, so daß nach einer semi-

klassisch konsistenten Näherung die Integration über eine "Zeit" τ analytisch ausgeführt werden kann, was die energieerhaltende δ-Funktion $\delta(E_2-E_1)$ liefert. Übrig bleiben dann nur noch die Integrationen über die sogenannten reduzierten Winkelvariablen $\bar{q}$, bei denen aus der vollen Winkelvariablen q der Anteil aus der freien Bewegung herausgezogen ist.

Wir beginnen mit der Transformation der einlaufenden Wellenfunktion $\psi^{(+)}$, die im Punkt (r,q) mit Hilfe eines F_1- bzw. F_2-Generators [60] auf Variable transformiert wird, die elastische Coulombbahnen beschreiben. Als neue Impulse führen wir $\bar{J}_1$ und eine von der "Zeit" τ her naheliegende Energie $\bar{E}_1$ ein, die durch die alten Variablen wie folgt ausgedrückt werden

$$\bar{J}_1 = J \tag{3.14}$$

$$\bar{E}_1 = \frac{p^2}{2\mu} + H_o(J,r) \quad . \tag{3.15}$$

Auf der rechten Seite von (3.14) und (3.15) stehen die alten Variablen im Punkt (r,q). $H_o(J,r)$ ist die freie Hamiltonfunktion des Systems. Der Index "1" in $\bar{J}_1$ und $\bar{E}_1$ soll auf die Randbedingungen J_1 und E_1 der einlaufenden Wellenfunktion $\psi^{(+)}$ hinweisen. $\bar{E}_1$ ist nicht identisch mit der Gesamtenergie E_1, da das Wechselwirkungspotential im Punkt (r,q) in der Definition von $\bar{E}_1$ fehlt.

Wir konstruieren nun zuerst einen F_2-Generator von (r,q) nach $(\bar{J}_1,\bar{E}_1)$. Wegen

$$p = \frac{\partial F_2(r,q,\bar{J}_1,\bar{E}_1)}{\partial r} \quad , \quad J = \frac{\partial F_2(r,q,\bar{J}_1,\bar{E}_1)}{\partial q} \tag{3.16}$$

erhält man durch Integration

$$F_2(r,q,\bar{J}_1,\bar{E}_1) = \int_T^q J(\bar{J}_1)\, d\tilde{q} + \int_T^r \tilde{p}(\tilde{r},\bar{J}_1,\bar{E}_1)\, d\tilde{r} + F_2(\tilde{r}_T,\tilde{q}_T,\bar{J}_1,\bar{E}_1) \tag{3.17}$$

mit der frei gewählten Integrationskonstanten

$$F_2(\tilde{r}_T,\tilde{q}_T,\bar{J}_1,\bar{E}_1) = \tilde{r}_T\, \tilde{p}_T + \tilde{q}_T\, \bar{J}_1 \quad . \tag{3.18}$$

Der Index "T" bezeichnet einen beliebigen aber festen Punkt auf der elastischen Coulombbahn, die man aus (3.15) mit den im Punkt (r,q) definierten Impulsen $\bar{J}_1$ und $\bar{E}_1$ erhält, wobei die zugehörigen Variablen $\tilde{r}$ und $\tilde{q}$ sind. Der Impuls $\tilde{p}$ in (3.17) ist der radiale Impuls der elastischen Coulombbahn

$$\tilde{P}(\tilde{r},\bar{J}_1,\bar{E}_1) = \pm \sqrt{2\mu(\bar{E}_1 - H_o(\bar{J}_1,\tilde{r}))} \tag{3.19}$$

und stimmt bei $\tilde{r}=r$ mit dem alten Impuls p überein.

Aus (3.17) berechnet man die neuen Variablen

$$\tau = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{E}_1} = \int_T^r \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{E}_1}\, d\tilde{r} + \frac{\partial \tilde{p}_T}{\partial \bar{E}_1}\, \tilde{r}_T \tag{3.20}$$

und

$$\begin{aligned} \bar{q} = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{J}_1} &= q + \int_T^r \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{J}_1} \cdot d\tilde{r} + \frac{\partial \tilde{p}_T}{\partial \bar{J}_1}\, \tilde{r}_T \\ &= q - \int_T^t \frac{\partial \bar{E}_1}{\partial \bar{J}_1}\, dt' + \frac{\partial \tilde{p}_T}{\partial \bar{J}_1}\, \tilde{r}_T \quad . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Die untere Zeile für $\bar{q}$ erhält man wegen

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{J}_1} d\tilde{r} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{J}_1} \cdot \tilde{p}\, dt' = \frac{\partial}{\partial \bar{J}_1} \left(\frac{\tilde{p}^2}{2\mu} \right) dt' = \frac{\partial}{\partial \bar{J}_1} (-\bar{E}_1) dt' . \quad (3.22)$$

Nun kann man die Phase Φ (3.6) der Wellenfunktion mit einem F_1-Generator auf die neuen Variablen (τ, q) transformieren

$$\tilde{\Phi}(\tau, \bar{q}; J_1, E_1) = \Phi(r,q; J_1, E_1) - F_1(r,q,\tau,\bar{q})/\hbar \quad (3.23)$$

mit

$$F_1(r,q,\tau,\bar{q}) = F_2(r,q,\bar{J}_1,\bar{E}_1) - \tau \bar{E}_1 - \bar{q} \bar{J}_1 . \quad (3.24)$$

Einsetzen von Φ (3.6) und F_2 (3.17) in (3.23) liefert

$$\tilde{\Phi}(\tau, \bar{q}; J_1, E_1) = -\frac{1}{\hbar} \int_1^p r\, dp' + \frac{1}{\hbar} \int_T^p \tilde{r}\, d\tilde{p} - \frac{1}{\hbar} \int_1^J q\, dJ' \quad (3.25)$$
$$- \eta \ln \left[\frac{2}{\hbar} p_1 r_1 + \frac{2}{a_o} r_1 - 2 \right] + \frac{1}{\hbar} \bar{J}_1 \bar{q} + \frac{1}{\hbar} \bar{E}_1 \tau .$$

Nach Konstruktion ist $\tilde{\Phi}$ unabhängig von (r,q). Die τ-Abhängigkeit steckt allein im Term $1/\hbar \cdot \bar{E}_1 \tau$. Die Wahl der oberen Integrationsgrenzen in (3.25) beeinflußt daher nicht die τ-Abhängigkeit in $\tilde{\Phi}$.

Die Amplituden erhält man in den neuen Variablen ebenfalls mit Argumenten der Stromerhaltung. Aus (3.20) und (3.21) folgt

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{E}_1} = \frac{1}{v} , \qquad \frac{\partial \tau}{\partial q} = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{J}_1} \quad , \qquad \frac{\partial \bar{q}}{\partial q} = 1 \quad , \tag{3.27}$$

d.h. einem festgehaltenen r entspricht in den neuen Variablen ein festgehaltenes τ . Das Flächenelement , das in den alten Variablen von dq aufgespannt wurde, wird in den neuen Variablen von $d\bar{q}$ aufgespannt.

Mit der Normierung (3.8) und der aus (3.27) folgenden Gleichung

$$\frac{\partial \bar{q}_1}{\partial q_1} = 1 \tag{3.28}$$

folgt für die Amplitude (3.10) in den neuen Variablen

$$A(\tau, \bar{q}; J_1, E_1) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{D(q_1)}{v\, N_1\, D(\bar{q})}} \cdot \sqrt{\frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}}} \quad , \tag{3.29}$$

wobei r als Funktion von τ und $\bar{q}$ zu verstehen ist.

Eine analoge kanonische Transformation für die auslaufende Wellenfunktion $\psi^{(-)}$ (3.11) führt auf die Phase

$$\tilde{\Phi}(\tau', \bar{q}'; J_2, E_2) = -\frac{1}{\hbar}\int_1^P r\, dp' + \frac{1}{\hbar}\int_T^P \tilde{r}\, d\tilde{p} - \frac{1}{\hbar}\int_1^J q\, dJ' - \eta_2 \ln\left[\frac{2}{\hbar} p_2 r_2 + \frac{2}{a_{o2}} r_2 - 2\right] + \frac{1}{\hbar}\bar{J}_2\bar{q}' + \frac{1}{\hbar}\bar{E}_1\tau' \tag{3.30}$$

und die Amplitude

$$A(\tau', \bar{q}'; J_2, E_2) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{D(q_2)}{v\, N_2\, D(\bar{q}')}} \sqrt{\frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}'}} \quad . \tag{3.31}$$

Allerdings sind zu gegebenen r und q die neuen Variablen

$(\tau, \bar{q})$ und $(\tau', \bar{q}')$ im allgemeinen verschieden. Die einlaufende semiklassische Wellenfunktion $\psi^{(+)}$ ist bestimmt durch die von (r_1, q_1, J_1, E_1) nach (r,q) führenden Bahnen. Diese ergeben im allgemeinen andere Werte von p und J als die in der auslaufenden semiklassischen Wellenfunktion $\psi^{(-)}$ auftretenden Bahnen, die von (r_2, q_2, J_2, E_2) nach (r,q) führen.
Nur für solche (r,q), die auf einer (J_1, E_1) mit (J_2, E_2) verbindenden klassischen Bahn liegen, sind $(\tau, \bar{q})$ und $(\tau', \bar{q}')$ identisch. Diese Bahnen entsprechen aber gerade den Punkten mit stationärer Phase im auszuführenden Integral und liefern deshalb den Hauptbeitrag. Die Beiträge der nichtstationären Bahnen sollten sich im wesentlichen wegheben und sind konsistent betrachtet in der semiklassischen Näherung ohne Bedeutung. Diese Eigenschaft liegt allen stationären Formulierungen der KSM zugrunde.

Wir setzen deshalb auch auf den nichtstationären Bahnen als Näherung

$$\tau' = \tau \quad , \quad \bar{q}' = \bar{q} \quad . \tag{3.32}$$

Mit den Phasen (3.25) und (3.30) sowie den Amplituden (3.29) und (3.31) werden nun die einlaufende bzw. auslaufende Wellenfunktion gebildet und in die S-Matrix (3.1) eingesetzt. Ersetzt man noch mit (3.26) und (3.27) die Integration über (r,q) durch eine Integration über $(\tau, \bar{q})$ und führt die τ-Integration aus folgt schließlich

$$S_{J_2 J_1}\, \delta(E_2 - E_1) = \delta(\bar{E}_2 - \bar{E}_1) \int \sqrt{\frac{D(q_1)\, D(q_2)}{N_1\, N_2}} \sqrt{\frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}} \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}}}\; e^{i\bar{\Delta}}\; d\bar{q} \tag{3.33}$$

mit

$$\bar{\Delta} = -\frac{1}{\hbar}\int_{1}^{p(1)} r\,dp' + \frac{1}{\hbar}\int_{T}^{p(1)} \tilde{r}\,d\tilde{p} - \frac{1}{\hbar}\int_{1}^{J(1)} q\,dJ' + \frac{1}{\hbar}\bar{J}_1\,\bar{q}$$
$$+\frac{1}{\hbar}\int_{2}^{p(2)} r\,dp' - \frac{1}{\hbar}\int_{T}^{p(2)} \tilde{r}\,d\tilde{p} + \frac{1}{\hbar}\int_{2}^{J(2)} q\,dJ' - \frac{1}{\hbar}\bar{J}_2\,\bar{q} \qquad (3.34)$$
$$-\eta \ln\left[\frac{2}{\hbar}p_1 r_1 + \frac{2}{a_o}r_1 - 2\right] + \eta_2 \ln\left[\frac{2}{\hbar}p_2 r_2 + \frac{2}{a_{o2}}r_2 - 2\right].$$

Der Index in den Klammern an den oberen Integralgrenzen gibt die Randbedingung der jeweiligen Bahn an.

Die Wahl der oberen Integrationsgrenzen in (3.34) ist wegen der Näherung (3.32) auf den nichtstationären Bahnen nicht mehr ganz ohne Einfluß auf den Wert des Integrals (3.33). Naheliegend wählt man für die Integrationsgrenzen den Umkehrpunkt ("turning-point-value-representation",TVR, [16]) oder asymptotische Werte. Wir wählen dafür die asymptotischen Werte nach vollzogener Streuung, wo nur noch die elastische Wechselwirkung (Coulombpotential,Drehimpulspotential) wirkt. Die unsymmetrische Wahl der Integrationsgrenzen verletzt wegen der Näherung (3.32) für die nichtstationären Bahnen im Gegensatz zur TVR geringfügig die Symmetrie der S-Matrix,insbesondere die Zeitumkehrinvarianz [16], führt aber zu einer einfach handhabbaren Darstellung der S-Matrix, die unter dem Namen "final-value-representation" [16] bekannt ist.

Im asymptotischen Bereich gilt

$$\bar{E}_1 = E_1\ ,\ \bar{E}_2 = E_2\ ,\ \bar{J}_2 = J_2\ ,\ \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_2} = 1\ , \qquad (3.35)$$

Die S-matrix vereinfacht sich dann nach Herausziehen der δ-Funktion und der formalen Ersetzung der Integration über die Endvariablen $\bar{q}=\bar{q}(q_1)$ durch eine Integration

über die Anfangsvariablen q_1 auf die später immer benutzte Anfangswert-Darstellung

$$S_{J_2 J_1} = \int \sqrt{\frac{D(q_1)\ D(\bar{q})}{N_1\ N_2}}\ \sqrt{\frac{\partial \bar{q}}{\partial q_1}}\quad \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\Delta - J_2 \bar{q})\right] \cdot dq_1 \qquad (3.36)$$

mit

$$\Delta = -\int_1^{p(1)} r\, dp' - \int_1^{J(1)} q\, dJ' + \int_T^{p(1)} \tilde{r}\, d\tilde{p} - \int_T^{2} \tilde{r}\, d\tilde{p} + \bar{q} J(1)$$

$$- \hbar\, \eta\, \ln\left[\frac{2}{\hbar} p_1 r_1 + \frac{2}{a_o} r_1 - 2\right] \qquad (3.37)$$

$$+ \hbar\, \eta_2 \ln\left[\frac{2}{\hbar} p_2 r_2 + \frac{2}{a_{o2}} r_2 - 2\right] .$$

Die ersten drei Integrale in (3.37) werden entlang klassischer Bahnen mit der Anfangsbedingung (J_1, E_1) berechnet. Das vierte Integral wird entlang elastischer Bahnen ausgeführt, die durch (J_2, E_2) bestimmt sind.

Betrachtet man die in (3.36) eingehenden Wellenfunktionen $\psi^{(+)}$ und $\psi^{(-)}$ nach der Festlegung der Integrationsgrenzen im asymptotischen Bereich, kann die S-Matrix in der Darstellung (3.36) aufgefaßt werden als eine Projektion [Projektionsoperator $\int dq_1 \exp(-iJ_2 \bar{q}(q_1))$] der vollen einlaufenden Wellenfunktion bei $t \to \infty$ auf die freie semiklassische "Eigenfunktion" des gewünschten Endzustandes.

Die Gleichungen (3.36) und (3.37) sind das Hauptresultat dieses Kapitels. Die Anfangswert-Darstellung der S-Matrix (3.36) liegt den Anwendungen in den folgenden Kapiteln zugrunde. Die Phase und die Amplitude sind aus den Lösungen der klassischen Gleichungen für alle Anfangsbedingungen q_1 zu berechnen (Anfangswertproblem).

Durch eine Näherung der stationären Phase an die Integraldarstellung (3.36) der S-Matrix kann bei höchstens zwei stationären Punkten in der Phase auch die übliche uniforme Airynäherung gewonnen werden [15,24]. Dies werden wir in Anhang I zeigen. Die uniforme Airynäherung wird in Kapitel 5 dem Vergleich mit der vorliegenden Integraldarstellung dienen.

3.3. Gültigkeitsgrenzen der Integraldarstellung

3.3.1. Die Verletzung der Zeitumkehrinvarianz

Durch die Näherung (3.32) und die Wahl der Integrationsgrenzen in (3.36) im auslaufenden asymptotischen Bereich verletzt die S-Matrix (3.36) die Zeitumkehrinvarianz geringfügig. Diese Verletzung macht sich aber erst bei klassisch stark verbotenen Übergängen bemerkbar [16] Dies kann man sich durch folgende Überlegungen plausibel machen.

Bei allen Übergängen tragen im wesentlichen nur einige stationäre Bahnen zum Wert des Integrals bei. Das zeigen die stationären Darstellungen der KSM . Die stationären Bahnen sind aber , genau wie die darauf basierenden uniformen Näherungen [15,20,23,24] zeitumkehrinvariant, d.h. man kann auf ihnen genauso eindeutig vom Anfangspunkt (charakterisiert durch J_1) zum gewählten Endpunkt (J_2) gelangen wie auch umgekehrt. Die nichtstationären Bahnen führen dagegen auf andere, vom gewählten Endpunkt (J_2) verschiedene Endpunkte (J). Bei einer Zeitumkehrtransformation wird der ursprünglich gewählte Endpunkt (J_2) zum neuen Anfangspunkt (J_2). Die von diesem ausgehenden Bahnen stimmen bis auf die stationären Bahnen nicht mit den vom alten Anfangspunkt (J_1) ausgehenden Bahnen überein, wodurch das Integral einen anderen Wert annimmt. Da der Wert des Integrals aber vor allem durch die stationären Bahnen bestimmt ist, während die Beiträge der nichtstationären Bahnen sich im wesentlichen wegheben, bleibt

die Änderung des Integrals bei Zeitumkehr sehr gering. Erst bei sehr stark verbotenen Übergängen, bei denen die Beiträge der (komplexen) stationären Bahnen selbst sehr klein werden, wächst der relative Beitrag der nichtstationären Bahnen zum Integral und infolgedessen wird die Verletzung der Zeitumkehrinvarianz bemerkbar.

3.3.2. Kaustikberührungen in der Integraldarstellung

Bei der Herleitung der Integraldarstellung (3.36) haben wir implizit angenommen , daß die Funktionaldeterminante $\partial \bar{q}/\partial q_1$ im ganzen Integrationsbereich ungleich Null ist. Ohne diese Voraussetzung ist die Umkehrabbildung $\bar{q}(q_1) \rightarrow q_1(\bar{q})$ nicht eindeutig und die Ersetzung der Integration über die Endvariable $\bar{q}$ durch eine Integration über die Anfangsvariable q_1 in (3.36) nicht mehr erlaubt.

Darüberhinaus ist an den Punkten $\partial \bar{q}/\partial q_1 = 0$ die Amplitude (3.29) der semiklassischen Wellenfunktion singulär ("Umkehrpunkt" der WKB-Wellenfunktion) und der WKB-Ansatz (3.3) ist nicht mehr gültig. Vielmehr müßte eine entsprechende Uniformisierung der Wellenfunktion benutzt werden.

$\partial \bar{q}/\partial q_1 = 0$ definiert die Kaustik bezüglich der Variablen q für die mit J_1 bei $t \rightarrow -\infty$ startenden Bahnen. Ist $\partial \bar{q}/\partial q_1$ am Ende der Bahn ($t \rightarrow \infty$) negativ, hat die zugehörige Bahn die Kaustik (mindestens einmal) berührt. Bei mehrfachen Kaustikberührungen kann die Funktionaldeterminante $\partial \bar{q}/\partial q_1$ wieder positiv werden. Kaustikberührungen der klassischen Bahnen geben generell Anlaß zu Zusatzphasen in der S-Matrix, deren Werte für uniforme Näherungen bekannt sind [31-35] . In der Integraldarstellung (3.36) sind derartige Phasen nicht berücksichtigt.

Wegen der auftretenden Schwierigkeiten (Singularität der Amplitude,Kaustikphasen) konnte bisher keine mathematisch einwandfreie Herleitung der Integraldarstellung

beim Auftreten von Kaustikberührungen angegeben werden.

Wenn wir uns daran erinnern, daß das Integral (3.36) konsistent eigentlich in der Näherung der stationären Phase auszuwerten ist, dann sollte die Darstellung (3.36) nur solange gültig sein [22,33] wie Punkte $\partial\bar{q}/\partial q_1=0$ A) weit weg und B) nicht zwischen den stationären Bahnen liegen. Gleichwohl zeigen die Ergebnisse in Kapitel 4 , daß die Integraldarstellung auch dann noch brauchbare Ergebnisse liefert, wenn nur sehr wenige stationäre Bahnen die Kaustik berühren.

Wertet man die Integraldarstellung tatsächlich in der Näherung der stationären Phase aus,so erhält man die übliche stationäre Darstellung [15,20,23,24].In dieser können beide oben angesprochenen Probleme behoben werden,da dafür einerseits Uniformisierungen (Airynäherung,Besselnäherung) bekannt sind und andererseits die Berechnung der Zusatzphasen (vorbehaltlich der Übertragung der Regeln [31-35] für kartesische Koordinaten auf Wirkungs-Winkelvariable) für die in der stationären Formulierung auftretenden Kaustiken $\partial J/\partial q_1=0$ in richtiger Weise möglich ist.

Es ist offensichtlich, daß starke Wechselwirkungen mit einer großen Abweichung der Winkelvariablen von ihrer ungestörten Bewegung ($\partial\bar{q}/\partial q_1=1$) das Auftreten von Kaustikberührungen begünstigen, da dann die Ableitung $\partial\bar{q}/\partial q_1$ besonders stark von Eins abweicht.Vorteilhaft wären deshalb Variable, die dem physikalischen Problem möglichst gut angepaßt sind und deren ungestörte Bewegung bereits einen großen Teil des Wechselwirkungspotentiales enthält. Ist das Restpotential klein, wird die Abweichung von der ungestörten Bahn ebenfalls klein bleiben und es kommt nicht zu Kaustikberührungen. Grundsätzlich könnte man also versuchen durch geeignete kanonische Transformationen auf neue Variable (am besten zyklische Variable) die Kaustikberührungen wegzutransformieren. Es ist aber sehr schwierig für ein konkretes Problem solche Transformatio-

nen zu finden.
Wir erwähnen abschließend noch einmal, daß die Integraldarstellung (3.36) die Grundlage für die Anwendung in den weiteren Kapiteln darstellt.

4. DIE MULTIPLE COULOMBANREGUNG VON ROTATIONSZUSTÄNDEN IM "SUDDEN" GRENZFALL

Wir wollen in diesem Kapitel die multiple Coulombanregung in Schwerionenreaktionen mit der in Kapitel 3 abgeleiteten Integraldarstellung der klassischen S-Matrix (KSM) (3.36) beschreiben. Die Rotationszustände sollen durch einen starren Rotator angenähert werden.

Bei der Beschreibung der multiplen Coulombanregung treten neben der radialen Relativbewegung zwei "innere" Freiheitsgrade auf (Rotatorspin und Bahndrehimpuls oder Projektion des Spins auf eine Achse). Wie in der Einleitung diskutiert wurde, führt die Beschreibung eines solchen Problems mit uniformen Näherungen zu sehr aufwendigen Rechnungen [44] , weshalb hier die Anwendbarkeit der Integraldarstellung untersucht werden soll. Allerdings ist die Beschreibung des vollen dynamischen Problems mit der Integraldarstellung in einer (J,L)-Darstellung der S-Matrix wegen zahlreicher Kaustikberührungen (siehe Abschnitt 3.3.2.) in schweren Systemen gescheitert [45].

Dies führt uns dazu , den "sudden" Grenzfall zu betrachten, bei dem es keine Rückkopplung der inneren Anregung des Targets auf die Relativbewegung zwischen Projektil und Target gibt. Im "sudden" Grenzfall können alle Ausdrücke, die in den Integranden der Integraldarstellung eingehen, analytisch berechnet werden und deshalb sollte er besonders geeignet sein, das Auftreten von Kaustikberührungen zu studieren und eventuell auf einen Weg führen, wie diese Kaustiken richtig zu behandeln sind.

Von Vorteil ist weiterhin, daß im "sudden" Grenzfall die deBoer-Winther Rechnung [43a] mit der quantenmechanischen Rechnung zusammenfällt und daher als Vergleichsrechnung herangezogen werden kann.

Zunächst werden in Abschnitt 4.1 die Bewegungsgleichungen für den "sudden" Grenzfall abgeleitet. Daran schließt in Abschnitt 4.2 die Formulierung der Integral-

darstellung (3.36) für die Coulombanregung an. In Abschnitt 4.3 werden schließlich die Ergebnisse diskutiert, die mit der Integraldarstellung für leichte und schwere Systeme gewonnen werden können. Insbesondere werden dabei die Verhältnisse untersucht, die bei Kaustikberührungen vorliegen.

4.1. Die Bewegungsgleichungen

Ausgangspunkt ist die Hamiltonfunktion für die multiple Coulombanregung mit reiner Quadrupoldeformation des Targets. Für die zu diskutierende Näherung sind die durch Abbildung 8 definierten Winkelvariablen $(\beta, \varphi, \bar{\lambda}, \vartheta)$ am geeignetsten. p_β, p_φ, $p_{\bar{\lambda}}$ und p_ϑ sind die kanonisch konjugierten Impulse. r und p_r sind der Relativabstand und der radiale Impuls. Wir setzen voraus, daß der Rotator sich vor Beginn der Streuung im Grundzustand befindet, so daß der zur zyklischen Variablen $\bar{\lambda}$ konjugierte Impuls $p_{\bar{\lambda}}$ identisch gleich Null ist. Mit dieser Wahl lautet die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\vartheta^2}{2\mu r^2} + \frac{p_\beta^2}{2\lambda} + p_\varphi^2 \left[\frac{1}{2\mu r^2 \sin^2\vartheta} + \frac{1}{2\lambda \sin^2\beta} \right] + \frac{Z_P Z_T e^2}{r} + \frac{Z_P e^2 Q_o^{(2)}}{2 r^3} P_2(\cos\gamma) \quad . \tag{4.1}$$

$Q_o^{(2)}$ ist das innere Quadrupolmoment und λ ist das Trägheitsmoment des Rotators. Für den Winkel γ zwischen Projektil-Target Achse und Symmetrieachse des Rotators gilt die Beziehung (Abb. 8)

$$\cos\gamma = \cos\vartheta \cos\beta + \sin\vartheta \sin\beta \cos\varphi \quad . \tag{4.2}$$

Nach Einführung des Bahndrehimpulsübertrages

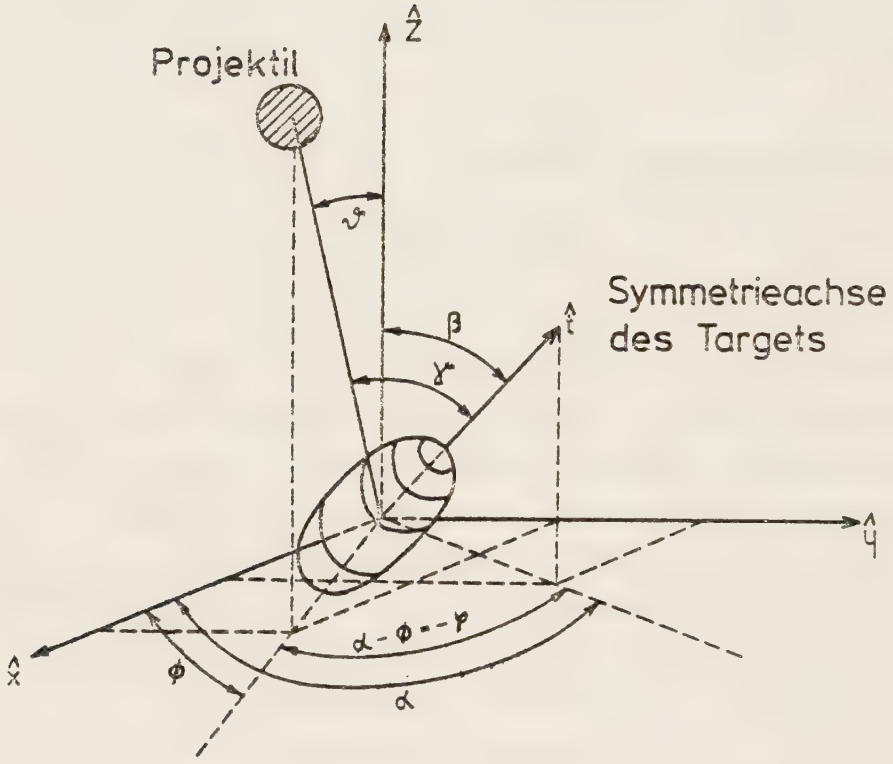

Abbildung 8 : Winkelvariable für die Streuung eines sphärischen Projektils an einem starren Rotator.
$[\Sigma = \alpha + \phi]$

$\tilde{p}_\vartheta = p_\vartheta - L\hbar$, L=Anfangsbahndrehimpuls (4.3)

geht man vorteilhaft zu dimensionslosen Variablen über

$$\bar{r} = \frac{r}{a_o} , \quad \bar{p}_r = \frac{p_r}{\mu v_1} , \quad \bar{p}_\vartheta = \frac{\tilde{p}_\vartheta}{2\bar{Q}_2\hbar} , \tag{4.4}$$

$$\bar{p}_\beta = \frac{p_\beta}{2\bar{Q}_2\hbar} , \quad \bar{p}_\varphi = \frac{p_\varphi}{2\bar{Q}_2\hbar} , \quad \tau = \frac{v_1}{a_o} t . \tag{4.5}$$

Für diesen Übergang benötigt man neben den bereits eingeführten Parametern a_o (2.9) und η (2.11) noch die dimensionslosen Parameter

$$\xi = \frac{Q_o^{(2)}\mu}{Z_T \mathcal{Z}} , \tag{4.6}$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{Z_P e^2 Q_o^{(2)}}{4\cdot\hbar\cdot v_1 \cdot a_o^2} , \tag{4.7}$$

$$\Lambda = \frac{2\bar{Q}_2}{\eta} . \tag{4.8}$$

Der energieunabhängige Parameter ξ ist ein Maß für die Adiabatizität des Stoßprozesses. Für $\xi = 0$ bewegt sich das Target während des Stoßprozesses überhaupt nicht in β - Richtung; mit $\xi \gg 1$ ist der Stoß sehr adiabatisch. Das Target folgt der Bewegung des Projektils, bekommt aber nur wenig Drehimpuls übertragen. In Tabelle 4 sind die ξ - Werte einiger Stoßsysteme angeführt.

$\bar{Q}_2$ ist ein Maß für die Monopol-Quadrupolwechselwirkung. Der Parameter Λ gibt die relative Stärke von Monopol-Quadrupolwechselwirkung zu Monopol-Monopolwechselwirkung wieder. Falls $\Lambda = 0$ gilt, domoniert die Monopol-Monopolwechselwirkung. Das Projektil bleibt auf einer ungestörten Coulombhyperbel. Mit wachsenden Λ beeinflußt die Mo-

System	E_{lab} (MeV)	ξ	Λ
$^{14}N + ^{28}Si$	18.0	0.8372	0.0907
$^{20}Ne + ^{152}Sm$	70.0	0.1628	0.0906
$^{12}C + ^{150}Nd$	70.4	0.1000	0.2744
$^{16}O + ^{152}Sm$	72.0	0.1342	0.1582
$^{18}O + ^{184}W$	90.0	0.1210	0.1538
$^{40}Ar + ^{110}Pd$	130.0	0.5562	0.0808
$^{40}Ar + ^{238}U$	170.0	0.1491	0.0901
$^{84}Kr + ^{232}Th$	371.0	0.2648	0.0729
$^{84}Kr + ^{238}U$	385.0	0.2679	0.0859
$^{208}Pb + ^{170}Er$	983.84	0.6272	0.0655
$^{208}Pb + ^{40}Ar$	1223.15	1.3397	0.0591

Tabelle 4 : Die dimensionslosen Parameter ξ (Adiabatizitätsparameter) und Λ (Verhältnis von Monopol-Quadrupolwechselwirkungsstärke zu Monopol-Monopolwechselwirkungsstärke) für einige Stoßsysteme. Mit (4.6)-(4.8) lassen sich aus ξ und Λ die verwendeten Quadrupolmomente und Trägheitsmomente der deformierten Kerne berechnen. Im "sudden" Grenzfall werden ξ und Λ gleich Null gesetzt.

nopol-Quadrupolwechselwirkung die Bahn, wobei für $\Lambda \ll 1$ die Störung der Coulombhyperbel aber weiterhin sehr gering ist. Ist $\Lambda \gg 1$, wird dagegen die Bahn vor allem durch das Quadrupolfeld bestimmt. In Tabelle 4 sind die für einige Systeme berechneten Λ - Werte notiert.

Aus der Hamiltonfunktion (4.1) leitet man die dimensionslosen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\bar{p}_r}{d\tau} = \frac{1}{\bar{r}^2} + \left(\frac{L}{\eta}\right)^2 \frac{1}{\bar{r}^3} + 2\Lambda \frac{L\,\bar{p}_\vartheta}{\eta\,\bar{r}^3} + 3\,\frac{\Lambda}{\bar{r}^4}\,P_2(\cos\gamma) + \frac{\Lambda^2}{\bar{r}^3}\left[\bar{p}_\vartheta^2 + \frac{\bar{p}_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}\right] \tag{4.9}$$

$$\frac{d\bar{r}}{d\tau} = \bar{p}_r \tag{4.10}$$

$$\frac{d\bar{p}_\vartheta}{d\tau} = \Lambda\,\frac{\bar{p}_\varphi^2}{\bar{r}^2}\,\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} + \frac{3}{\bar{r}^3}\cdot\cos\gamma\left[\sin\vartheta\cos\beta - \cos\vartheta\cdot\sin\beta\cos\varphi\right] \tag{4.11}$$

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{L}{\eta}\,\frac{1}{\bar{r}^2} + \Lambda\,\frac{\bar{p}_\vartheta}{\bar{r}^2} \tag{4.12}$$

$$\frac{d\bar{p}_\beta}{d\tau} = \frac{\xi}{2}\,\bar{p}_\varphi^2\,\frac{\cos\beta}{\sin^3\beta} + \frac{3}{\bar{r}^3}\cos\gamma\left[\cos\vartheta\sin\beta - \sin\vartheta\cos\beta\cos\varphi\right] \tag{4.13}$$

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{\xi}{2}\,\bar{p}_\beta \tag{4.14}$$

$$\frac{d\bar{p}_\varphi}{d\tau} = \frac{3}{\bar{r}^3}\cos\gamma\sin\vartheta\sin\beta\sin\varphi \tag{4.15}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \bar{p}_\varphi \left[\frac{\Lambda}{\bar{r}^2 \sin^2\vartheta} + \frac{\xi}{2 \cdot \sin^2\beta} \right] . \qquad (4.16)$$

ab. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen (4.9)-(4.16) hängen außer von den gewählten Anfangsbedingungen nur noch von den vier Parametern ξ, Λ, $\bar{Q}_2$ und (L/η) ab, die durch die physikalischen Eigenschaften des Streuprozesses bestimmt sind.

Wir betrachten nun den sogenannten "sudden" Grenzfall, den man erhält, wenn die Parameter Λ und ξ in den Bewegungsgleichungen Null gesetzt werden. Damit vereinfacht sich das Problem entscheidend: Die Rückkopplung der inneren Bewegung auf die Relativbewegung fällt weg. Das Projektil bewegt sich auf einer Coulombbahn und das Target bleibt bei seiner Anfangsorientierung, da die Winkel β (4.14) und φ (4.16) konstant sind. Die Parameterabhängigkeit der Bewegungsgleichungen ist auf die beiden Größen $\bar{Q}_2$ und (L/η) reduziert.

Obwohl das Projektil sich auf einer ungestörten Coulombbahn mit konstantem Drehimpuls und konstanter Energie bewegt, ändern sich im Verlauf des Stoßes Drehimpuls und Energie des Targets. Im "sudden" Grenzfall wird deshalb Drehimpuls- und Energieerhaltung verletzt.

Die Lösungen für $\bar{p}_r$ (4.9) und $\bar{r}$ (4.10) sind im "sudden" Grenzfall geschlossen bekannt. Damit kann man auch die anderen Bewegungsgleichungen analytisch integrieren und Phase und Amplitude der Integraldarstellung (3.36) berechnen. Die Einzelheiten der analytischen Berechnungen sind in Anhang II aufgeführt.

4.2. Die klassische S-Matrix für die multiple Coulombanregung

Für die S-Matrix wählen wir die (J,m)-Darstellung, wo J der Spin des Targets und m die Projektion des Spins J auf

die Einfallsachse ist. Der Zusammenhang von J und m mit den im vorigen Abschnitt eingeführten Variablen wird weiter unten diskutiert. In der (J,m)-Darstellung lautet der differentielle Wirkungsquerschnitt für den Übergang vom Grundzustand mit $J_1=0$ und $m_1=0$ zum Zustand J_2

$$\frac{\partial\sigma_{J_2 J_1=0}}{\partial\Omega} = \sum_{m_2} \left| \sum_L f^L_{J_2 m_2 J_1=0, m_1=0}(\Omega) \right|^2 \qquad (4.17)$$

mit der Streuamplitude

$$f^L_{J_2 m_2 00}(\Omega) = \frac{1}{2ik} \sum_L (2L+1)\, d^L_{m_2 0}(\Omega) \left[S^L_{J_2 m_2 00} - \delta_{J_2 0} \cdot \delta_{m_2 0} \right] . \qquad (4.18)$$

k ist die Wellenzahl des Eingangskanals, L ist der Gesamtdrehimpuls, der gleich dem Anfangsbahndrehimpuls ist und $d^L_{m_2 0}$ ist eine Drehfunktion.

Die Summation über die Partialwellen in (4.18) kann durch eine Integration über L ersetzt werden, die dann mit der Näherung der stationären Phase ausgewertet wird. Da nur die Coulombphase als Funktion des Gesamtdrehimpulses L schnell veränderlich ist, während der restliche Teil der Phase sich nur langsam verändert, wird die Näherung der stationären Phase allein an der Coulombphase durchgeführt. Der differentielle Wirkungsquerschnitt faktorisiert dann [43b] und lautet

$$\frac{\partial\sigma_{J_2}}{\partial\Omega} = \frac{\partial\sigma_R}{\partial\Omega} \cdot P_{J_2}(\Theta) \qquad (4.19)$$

wo $\partial\sigma_R/\partial\Omega$ der Rutherfordwirkungsquerschnitt ist und

die Anregungswahrscheinlichkeit $P_{J_2}(\Theta)$ durch

$$P_{J_2}(\Theta) = \sum_{m_2} \left| S^{L}_{J_2 m_2} \right|^2 \tag{4.20}$$

gegeben ist. Hier und im folgenden werden die Indizes des Eingangskanals weggelassen. Der stationäre Gesamtdrehimpuls L in (4.20) hängt mit dem Streuwinkel Θ durch die übliche Coulombbeziehung

$$\Theta = 2 \arctan \frac{\eta}{L} \tag{4.21}$$

zusammen.

Die Integraldarstellung der S-Matrixelemente $S^{L}_{J_2 m_2}$ erhält man durch Spezialisierung der Ausdrücke (3.36) und (3.37) auf das vorliegende Problem. Zu diesem Zweck schreiben wir zunächst die Phase in den Variablen $(\beta, \varphi, \vartheta)$ und gehen dann mittels einer kanonischen Transformation auf die gewünschte (J,m)-Darstellung über.

Im "sudden" Grenzfall können wir vorteilhaft die oberen Integratinsgrenzen sowie den noch frei verfügbaren Punkt "T" zur asymptotischen Grenze "2" im Ausgangskanal schieben. Alle Winkelvariablen stimmen dann mit den entsprechenden reduzierten Winkelvariablen überein und die Phase lautet in den dimensionslosen Variablen

$$\begin{aligned}\Delta'(\varphi,\beta) = &- \eta \int_1^2 \bar{r}\, d\bar{p}_r + 2\bar{Q}_2 \int_1^2 \bar{p}_\vartheta\, d\vartheta + 2\bar{Q}_2 \int_1^2 \bar{p}_\beta\, d\beta \\ &+ 2\bar{Q}_2 \int_1^2 \bar{p}_\varphi\, d\varphi + 2\bar{Q}_2\, \bar{p}_{\beta 1} \cdot \beta_1 - \eta \ln\left[\frac{2}{\hbar} p_1 r_1 + \frac{2}{a_o} r_1 - 2\right] \\ &+ \eta_2 \ln\left[\frac{2}{\hbar} p_2 r_2 + \frac{2}{a_{o2}} r_2 - 2\right] .\end{aligned} \tag{4.22}$$

β_1 und $\bar{p}_{\beta 1}$ sind Größen an der Grenze "1" des Eingangskanals. $2\bar{Q}_2\bar{p}_{\beta 1}$ ist je nach Wahl der semiklassischen Quantisierung Null oder Einhalb. Die entsprechenden Terme für die Winkelvariablen (φ,ϑ) sind stets Null.

Etwas Vorsicht muß man bei der Berechnung des ersten Integrals in (4.22) walten lassen. Im "sudden" Grenzfall erhält man aus den Bewegungsgleichungen $r=r^c$ und $p_r=p_r^c$ (c=Coulomb). Damit würde das erste Integral

$$\delta\phi = -\eta \int_1^2 \bar{r}\, d\bar{p}_r \tag{4.23}$$

identisch mit einem Teil der freien Coulombphase sein und nicht von den "inneren" Winkelvariablen $(\varphi,\beta,\vartheta)$ abhängen. Entwickelt man dagegen $\delta\phi$ nach dem Parameter Λ (4.8), so erhält man (siehe Anhang II)

$$\delta\phi = -\eta \int_1^2 \bar{r}^c\, d\bar{p}_r^c + \delta - 2\bar{Q}_2 \int_1^2 \bar{p}_\vartheta\, d\vartheta \tag{4.24}$$

mit

$$\delta = -2\bar{Q}_2 \int_1^2 \frac{d\bar{r}^c}{\bar{r}_c^3\, \bar{p}_r^c}\, P_2(\cos\gamma) \,. \tag{4.25}$$

Setzt man (4.24) in (4.22) ein, hebt sich das zweite Integral heraus. Das dritte und vierte Intgral in (4.22) tragen zur Phase nichts bei, da im "sudden" Grenzfall die Winkel φ und β konstant sind. Da weiterhin die Energie der Relativbewegung konstant bleibt, stimmen die Konstanten (η_2, a_{o2}) an der Grenze "2" im Ausgangskanal mit den Konstanten im Eingangskanal überein. Zieht man deshalb noch die freie Coulombphase [das erste Integral in (4.24) und die beiden Logarithmusterme in (4.22)] , die nicht

von $(\varphi,\beta,\vartheta)$ abhängt, aus der Phase (4.22) heraus, vereinfacht sich (4.22) auf

$$\Delta(\varphi,\beta) = \delta + 2\bar{Q}_2\,\bar{p}_{\beta 1}\,\beta_1 \quad . \tag{4.26}$$

Als nächster Schritt wird die Phase (4.26) mit einem F_1-Generator auf die zu (J,m) kanonisch konjugierten Winkelvariablen (q_J,q_m) transformiert

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(q_J,q_m) &= \Delta(\varphi,\beta) - F_1(\varphi,\beta,q_J,q_m) \\ &= \Delta(\varphi,\beta) - F_2(\varphi,\beta,J,m) + Jq_J + mq_M \quad .\end{aligned} \tag{4.27}$$

Für die Berechnung des F_2-Generators werden die neuen Impulse J und m als Funktion der alten Variablen $(\varphi,\beta,\bar{p}_\varphi,\bar{p}_\beta)$ benötigt. Man findet (Abb. 8)

$$J = 2\bar{Q}_2\sqrt{\bar{p}_\beta^2 + \frac{\bar{p}_\varphi^2}{\sin^2\beta}} \tag{4.28}$$

$$m = -\,2\bar{Q}_2\,\bar{p}_\varphi \quad . \tag{4.29}$$

Mit

$$\begin{aligned}F_2(\varphi,\beta,J,m) = 2\bar{Q}_2\int_1^{\varphi}\bar{p}_\varphi(m)\,d\varphi' + 2\bar{Q}_2\int_1^{\beta}\bar{p}_\beta(J,m,\beta)\,d\beta' \\ + 2\bar{Q}_2\,\bar{p}_{\beta 1}\cdot\beta_1\end{aligned} \tag{4.30}$$

erhält man nach Ausführung der Integrale

$$F_2(\varphi,\beta,J,m) = -\varphi m - m\cdot\arctan\frac{\sqrt{J^2\sin^2\beta - m^2}}{m\cos\beta} + J\cdot\arctan\frac{\sqrt{J^2\sin^2\beta - m^2}}{J\cos\beta} \quad . \tag{4.31}$$

Aus (4.31) folgen die neuen Winkelvariablen

$$q_J = \frac{\partial F_2}{\partial J} = \arctan\frac{\sqrt{J^2\sin^2\beta - m^2}}{J\cos\beta} \tag{4.32}$$

und

$$q_m = \frac{\partial F_2}{\partial m} = -\varphi - \arctan\frac{\sqrt{J^2\sin^2\beta - m^2}}{m\cos\beta} \quad . \tag{4.33}$$

Die Winkelvariablen q_J und q_m sind im Gegensatz zu φ und β auch im "sudden" Grenzfall nicht konstant. Setzt man (4.32) und (4.33) in (4.31) ein, folgt schließlich für den F_2-Generator

$$F_2(\varphi,\beta,J,m) = m\,q_m + J\,q_J \quad . \tag{4.34}$$

Damit erhält man für die Phase (4.27)

$$\tilde{\Delta}(q_J,q_m) = \delta + J_1\,q_J^1 \quad , \tag{4.35}$$

wobei die aus (4.28) und (4.32) folgenden Identitäten

$$J_1 = 2\bar{Q}_2\,\bar{P}_{\beta 1} \quad , \quad q_J^1 = \beta_1 \tag{4.36}$$

benutzt worden sind.

Im Integranden von (3.36) ist der Term $\exp(-iJ_2\bar{q})$ proportional zur semiklassischen Rotatorwellenfunktion des freien Endzustandes; analog gehört der Term $J_1 q_J^1$ in der Phase (4.35) zur semiklassischen Rotatorwellenfunktion des freien Anfangszustandes. Diskussionen von Bowman und Lee [58] in der Molekülphysik zeigen, daß die Ersetzung der semiklassischen Rotatorwellenfunktionen durch die entsprechenden quantenmechanischen Eigenfunktionen $Y_{J_2 m_2}$ zu erheblichen Verbesserungen der Resultate führt. Wir führen deshalb in der S-Matrix ebenfalls diese Ersetzung durch. Sie führt zu beträchtlichen Verbesserungen unserer Resultate, was ein Vergleich [siehe Abschnitt 4.3] mit früher veröffentlichten [59] Rechnungen deutlich macht, die mit semiklassischen Rotatorwellenfunktionen durchgeführt worden sind.
Mit

$$D(q_J^1, q_m^1) = \sin q_J^1 \quad , \quad D(q_J, q_m) = \sin q_J \tag{4.37}$$

$$\text{Det}\, \frac{\partial(q_J^1, q_m^1)}{\partial(\beta, \varphi)} = 1 \tag{4.38}$$

und

$$N_1 = N_2 = 4\pi \quad , \tag{4.39}$$

wobei N_2 in die Normierung der Kugelfunktionen $Y_{J_2 m_2}$ eingeht, nimmt die Integraldarstellung (ID) der KSM schließlich die Form

$$S^{ID}_{J_2 m_2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{\pi} d\beta \int_0^{2\pi} d\varphi \; D(\beta,\varphi) \cdot Y^{*}_{J_2 m_2}(q_J, q_m) \; \sqrt{\sin q_J \cdot \sin q_J^1} \; e^{i\delta} \tag{4.40}$$

an.Gleichung (4.40) ist das Hauptresultat dieses Kapitels. Mit (4.40) werden wir die Anregungswahrscheinlichkeiten für die multiple Coulombanregung eines starren Rotators im "sudden" Grenzfall berechnen. Die Determinante

$$D(\beta,\varphi) = \text{Det}\ \frac{\partial(q_J, q_m)}{\partial(\beta,\varphi)} \quad , \tag{4.41}$$

die zur Amplitude der einlaufenden Wellenfunktion gehört, wird in Anhang II berechnet. Wird (4.41) als Funktion von (β,φ) kleiner oder gleich Null, so haben die zugehörigen klassischen Bahnen die Kaustik des Problems berührt.

Die Ersetzung der semiklassischen Rotatorfunktion $[\sim \exp(-iJ_2\bar{q})]$ durch die quantenmechanische Rotatorfunktion $[\sim Y_{J_2 m_2}]$ führt dazu, daß (4.40) für große Partialwellen den richtigen Grenzwert annimmt. Bei verschwindender Wechselwirkung erhält man

$$\delta = 0 \quad , \quad q_J = \beta \quad , \quad q_m = -\varphi \pm \frac{\pi}{2} \quad , \tag{4.42}$$

woraus

$$\lim_{L\to\infty} S^{ID}_{J_2 m_2} = \delta_{J_2 0} \cdot \delta_{m_2 0} \tag{4.43}$$

folgt.
Die semiklassische S-Matrix (4.40)kann nun mit der quantenmechanischen Formulierung der S-Matrix im "sudden" Grenzfall verglichen werden, die durch den von Alder und Winther hergeleiteten Ausdruck $S^{AW}_{J_2 m_2}$ [43c] gegeben ist. Wir formulieren den Ausdruck $S^{AW}_{J_2 m_2}$ anders

als Alder-Winther in der (J,m)-Darstellung (siehe Anhang II) und erhalten

$$S^{AW}_{J_2 m_2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{\pi} d\beta \int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{i\delta'} \cdot \sin\beta \cdot Y_{J_2 m_2}(\beta,\varphi) \,. \qquad (4.44)$$

Die in [43c] verwendete Phase δ' läßt sich nach kurzer Rechnung [Anhang II] auf die Form (4.25) der Phase δ umschreiben, so daß die Phasen in der semiklassischen und der quantenmechanischen S-Matrix identisch sind. Unterschiede zwischen beiden Formulierungen (4.40) und (4.44) bestehen somit nur in der Amplitude des Integranden. Die Amplituden wären ebenfalls identisch, wenn $q_J = q_J^1$ und $q_m = q_m^1$ gelten würde. Die Unterschiede lassen sich daher auf die Tatsache zurückführen, daß auch im "sudden" Grenzfall die Variablen q_J (4.32) und q_m (4.33) nicht konstant sind und deshalb die Funktionaldeterminante (4.41) von Eins abweicht.

Wir wollen hier betonen, daß somit die in [41] behauptete vollständige Identität von Alder-Winther Ausdruck und Integraldarstellung der KSM im "sudden" Grenzfall nicht vorhanden ist. Donangelo [41] hat nämlich bei Bildung des "sudden" Grenzfalls implizit angenommen, daß die Winkelvariablen q_J und q_m während des Stoßes konstant bleiben, wie es tatsächlich nur für die Winkelvariablen β (4.14) und φ (4.16) der Fall ist (Im Fall der Rückwärtsstreuung mit nur einem inneren Freiheitsgrad bleibt dagegen auch die Winkelvariable q_J konstant).

Die durch J (4.28) und m(4.29) definierte kanonische Transformation führt zu Winkelvariablen q_J (4.32) und q_m (4.33), die an einigen isolierten Punkten nicht mehr wohldefiniert sind. Immer wenn Nenner und Zähler ($2\bar{Q}_2\bar{p}_\beta = \sqrt{J^2\sin^2\beta - m^2}$) der arctan-Funktionen in (4.31)-(4.33) als Funktion von β und φ gleichzeitig

Null werden, wird der Wert der arctan-Funktion unbestimmt. q_J und q_m haben hier Verzweigungspunkte in der (β,φ)-Ebene. Die Funktionaldeterminante (4.41) wird an an diesen Punkten singulär, bleibt aber integrierbar. Weiterhin kann der Spin J sowohl während als auch am Ende des Stoßprozesses einen Wert kleiner als $J_1=1/2$ annehmen. Es wären somit Endzustände erreichbar, deren Spin (Energie) unter dem Spin (Energie) des Grundzustandes läge.

Zur Vermeidung dieser Schwierigkeiten ersetzen wir nach vollzogener kanonischer Transformation in den Winkelvariablen q_J (4.32) und q_m (4.33) sowie in der Determinante (4.41) den Rotatorspin J (4.28) durch

$$\bar{J} = J + \frac{1}{2} = 2\bar{Q}_2 \sqrt{\bar{p}_\beta^2 + \frac{\bar{p}_\varphi^2}{\sin^2\beta}} + \frac{1}{2} \quad . \tag{4.45}$$

Damit $\bar{J}$ wie üblich halbzahlig quantisiert ist und zu Beginn der Streuung mit $J_1=1/2$ übereinstimmt, muß man den Anfangswert $\bar{p}_{\beta 1}$ bei Lösung der Bewegungsgleichungen (4.9)-(4.16) [siehe Anhang II] gleich Null setzen. Die Verzweigungspunkte von q_J und q_m verschieben sich durch die Ersetzung (4.45) in die komplexe Ebene und q_J und q_m sind dann in der gesamten reellen (β,φ)-Ebene eindeutig definiert. Die Determinante (4.41) bleibt beschränkt, kann aber das Vorzeichen wechseln. Der Spin $\bar{J}$ kann nicht kleiner als der Grundzustandsspin $J_1=1/2$ werden.

Die formal nicht streng ableitbare aber plausible Ersetzung (4.45) ermöglicht eine leichte Auswertung des Integrals (4.40) (keine Singularitäten im Integranden) und führt zu vernünftigen Ergebnissen, wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden wird.

4.3. Ergebnisse und Zusammenfassung

Die Auswertung der Integrale der S-Matrix (4.40) ist der einzige Schritt, der numerisch durchgeführt werden muß. Aus Symmetriegründen kann die φ-Integration auf $\varphi = [\pi/2, 3\pi/2]$ beschränkt werden. Allen Ergebnissen liegen Rechnungen mit äquidistanten Stützstellen im Abstand von 1° zu Grunde, was die Berechnung des Integranden an 181×181 Punkten der (β,φ)-Ebene erfordert.

Wir vergleichen nun die mit der semiklassischen Integraldarstellung (4.40) und dem quantenmechanischen Ausdruck (4.44) berechneten Anregungswahrscheinlichkeiten für einen starren Rotator.

Als erstes betrachten wir ein System mit dem Sommerfeldparameter $\eta = 13.6$ bei dem Streuwinkel $\Theta = 160^\circ$, das bei einer Kopplungstärke $\bar{Q}_2 = 0.62$ dem relativ leichten System $^{14}N + ^{28}Si, E_{lab} = 18$ MeV entspricht (Abbildung 9). In den Rechnungen zu Abbildung 9 sind die Coulombanregungswahrscheinlichkeiten des Systems mit festem (L/η) als Funktion der Wechselwirkungsstärke $\bar{Q}_2$ berechnet worden, um die Güte der semiklassischen Integraldarstellung unter dem wachsenden Einfluß der Monopol-Quadrupolwechselwirkung zu untersuchen.

Es zeigt sich, daß die semiklassischen von den quantenmechanischen Anregungswahrscheinlichkeiten im elastischen Kanal ($J_2 = 0$) und für den ersten angeregten Zustand ($J_2 = 2$) im Rahmen der Zeichengenauigkeit auch bis zu sehr großen Kopplungsstärken hin nicht unterschieden werden können. Erst die Anregungswahrscheinlichkeit des 4^+-Zustandes zeigt geringe aber für alle Kopplungsstärken $\bar{Q}_2$ gleichbleibende Unterschiede.

Es sei erwähnt, daß diese gute Übereinstimmung wesentlich darauf beruht, daß in der semiklassischen S-Matrix (4.40) die quantenmechanischen Rotatorfunktionen ($\sim Y_{J_2 m_2}$) benutzt werden und nicht die semiklassischen Rotatorwellenfunktionen ($\sim \exp(-iJ_2\bar{q})$).

Ältere von uns veröffentlichte Rechnungen [59] , welche die semiklassischen Rotatorwellenfunktionen verwenden und die ebenfalls in Abbildung 9 eingezeichnet sind, stimmen weit weniger gut mit der quantenmechanischen Rechnung überein.

Wir haben die Kopplungsstärke $\bar{Q}_2$ vor allem auch deshalb variiert, um die Güte der Integraldarstellung der KSM in Fällen zu testen, in denen Kaustikberührungen der klassischen Bahnen auftreten. Diese machen sich bei großer Kopplungsstärke dadurch bemerkbar, daß die Determinante (4.41) negativ wird. Wir hatten in Abschnitt 3.3.2 diskutiert, daß in diesen Fällen die Integraldarstellung streng genommen nicht mehr gültig ist. Betrachten wir diese Determinante als Funktion von β und φ , so stellen wir fest, daß ab einer Kopplungsstärke $\bar{Q}_2 \approx 0.75$ (Pfeil $\Uparrow$ in Abb.9) in der (β,φ)-Ebene ein Bereich mit Kaustikberührungen (Determinante ≤ 0, siehe Abschnitt 3.3.2) auftritt. Der Bereich mit Kaustikberührungen ist sehr klein (siehe Abb. 10) und wächst bis zur Kopplungsstärke $\bar{Q}_2=3.0$ nicht an. Die Kaustikberührungen sind um einen Punkt mit m=0 und J=1/2 lokalisiert. Sie liegen also in der Umgebung eines stationären Punktes.

Die gleichbleibende Größe des Bereichs mit Kaustikberührungen ist etwas überraschend, da man an sich erwarten würde, daß mit der Wechselwirkungsstärke $\bar{Q}_2$ auch die Zahl der Kaustikberührungen zunimmt, was schließlich zum Zusammenbruch der Gültigkeit der Integraldarstellung führen würde. Unsere Rechnungen für das leichte System zeigen (Abb.9), daß trotz der Tatsache, daß eine stationäre Bahn die Kaustik berührt, die Integraldarstellung (4.40) sehr gute Ergebnisse liefert.

Wesentlich schlechter als im leichten System ist die Übereinstimmung der semiklassischen mit der quantenmechanischen Rechnung für das schwere System $^{84}Kr+^{232}Th$, $E_{lab}=371$ MeV [73], wo mit konstanter Kopplungsstärke Q_2 die

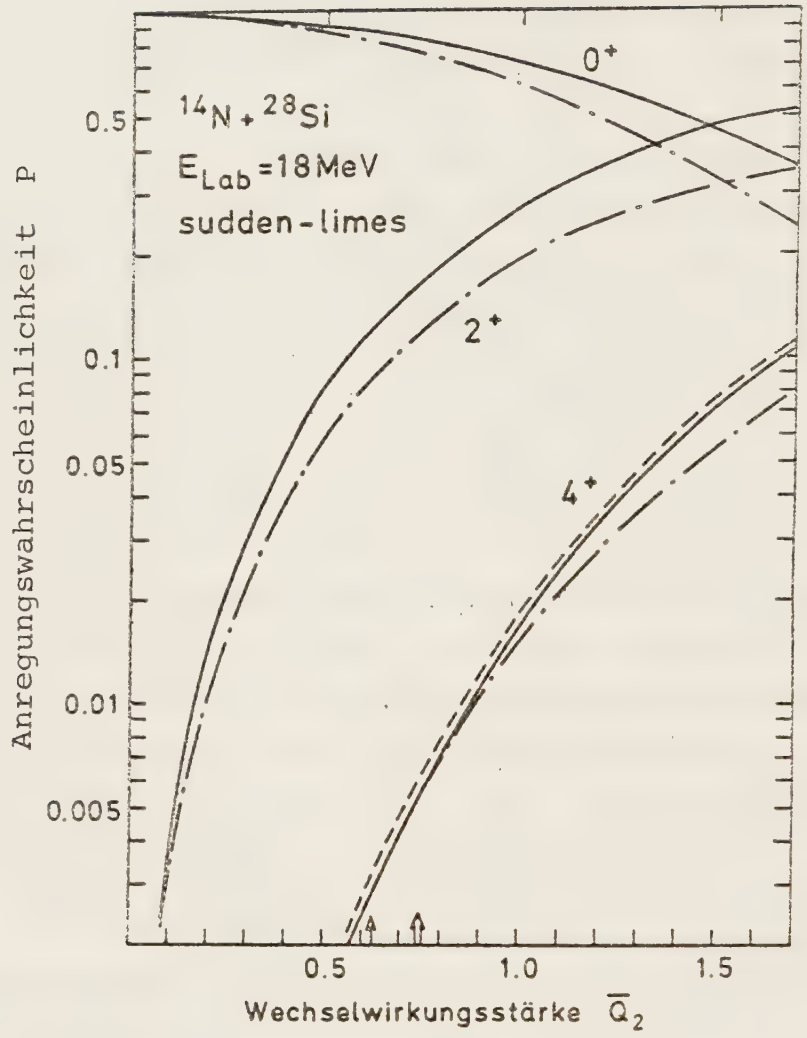

Abbildung 9 : Quantenmechanische (---) und semiklassische (——) Anregungswahrscheinlichkeiten im "sudden" Grenzfall ($\eta = 13.6; \Theta = 160°$). Für den 0^+- und den 2^+-Zustand fallen beide Ergebnisse auf die gleiche Kurve. Die strich-punktierten Kurven zeigen die Ergebnisse von Rechnungen mit semiklassischen Rotatorwellenfunktionen. Der Pfeil ↑ gibt die Wechselwirkungsstärke des leichten Systems $^{14}N+^{28}Si$ an; der Pfeil ⇑ gibt an, ab welcher Wechselwirkungsstärke Kaustikberührungen auftreten.

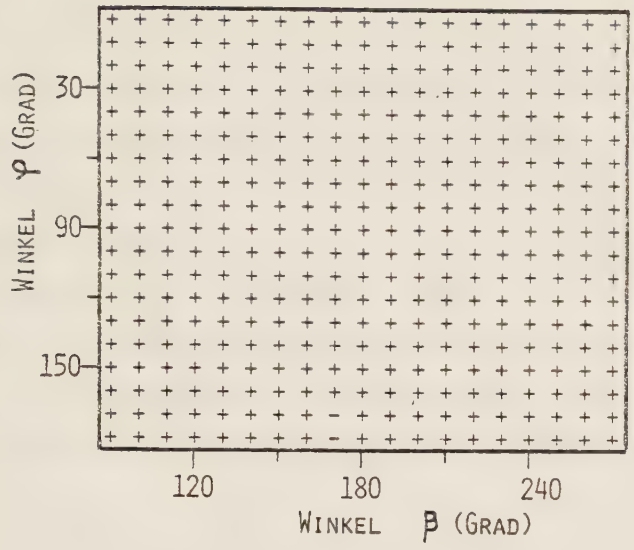

Abbildung 10 : Vorzeichen der Determinante (4.41) als Funktion von (φ,β) im leichten System $^{14}N+^{28}Si$, $E_{lab}=18$ MeV $[\eta=13.6;\Theta=160^{\circ};\ \bar{Q}_2=0.988]$. Negative Vorzeichen zeigen, daß die zugehörigen klassischen Bahnen die Kaustik berührt haben.

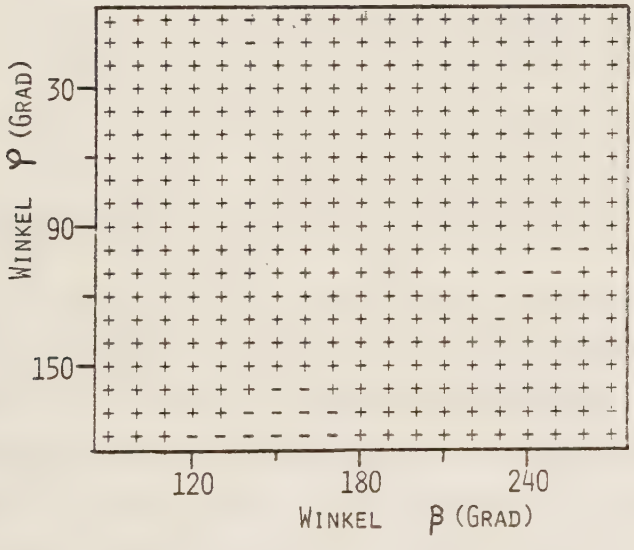

Abbildung 11 : Siehe Abb.10, aber für das schwere System $^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=371$ MeV $[\eta=243.6;\ \Theta=80^{\circ};\ \bar{Q}_2=8.882]$.

Winkelverteilungen der angeregten Zustände berechnet worden sind. Hier wird also entgegengesetzt zum ersten Beispiel der Parameter $\bar{Q}_2$ festgehalten und der Parameter (L/η) variiert. Die Behandlung der Streuwinkelabhängigkeit entspricht den Verhältnissen bei der Variation der Kopplungsstärke insofern, als mit wachsendem Streuwinkel wie auch mit wachsender Kopplungsstärke die Anregungswahrscheinlichkeiten der inelastischen Zustände größer werden, während die inelastischen Übergänge zu kleinen Streuwinkeln und kleiner Kopplungsstärke hin immer verbotener werden.

In Abbildung 12 sind die Winkelverteilungen für die Anregungen einiger ausgewählter Rotationszustände aufgetragen. Während die Winkelverteilung für den elastischen Kanal (J_2=0) noch sehr nahe am quantenmechanischen Verlauf liegt, nehmen die Abweichungen vom quantenmechanischen Wert zu höheren Spins stark zu. Bereits der Verlauf für den Spin J_2=10 hat kaum noch Ähnlichkeiten mit den exakten Verhältnissen. Zwei Gründe für die schlechte Übereinstimmung lassen sich finden.

Zwischen Θ=25° und Θ=165° treten einfache Kaustikberührungen auf. Anders als im leichten System sind diese in mehrere Bereiche aufgegliedert (Abb. 11) und über die (β,φ)-Ebene verteilt. Die Bereiche können insgesamt recht groß werden (Maximum bei Θ=60°) und in ihnen treten sehr viele klassisch erlaubte Spinquantenzahlen J (bis J=10) auf, während im leichten System nur Spinquantenzahlen nahe am Grundzustandsspin J_1=1/2 im Bereich der Kaustikberührungen zu finden waren. Daher berühren im schweren System wesentlich mehr stationäre Bahnen die Kaustik als im leichten System. Dieses vermehrte Auftreten von Kaustikberührungen ist ein Grund dafür, daß die Resultate der Integraldarstellung für das schwere System schlechter sind als für das leichte System.

Der zweite Grund für die in Abbildung 12 auftretenden

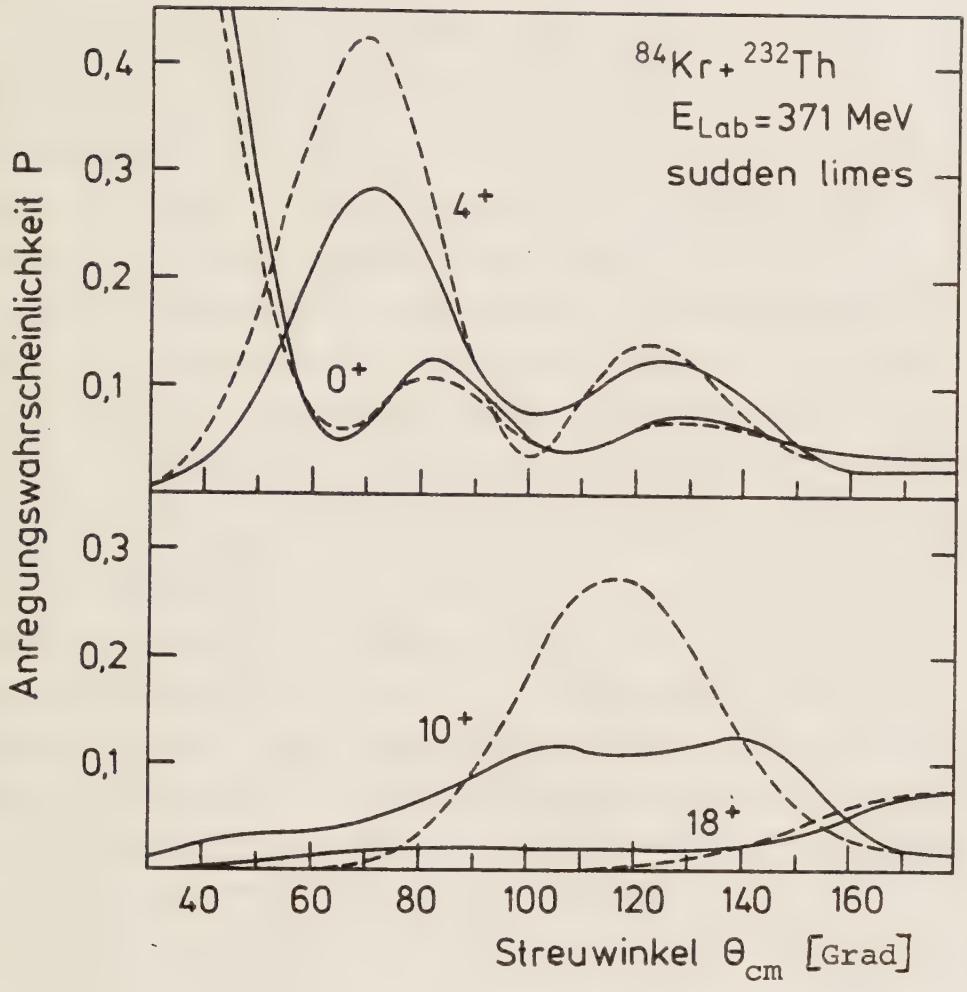

Abbildung 12 : Vergleich von quantenmechanisch (---) (4.44) und semiklassisch (——) (4.40) berechneten Winkelverteilungen der Anregungswahrscheinlichkeiten für einige ausgewählte Zustände von ^{232}Th (starrer Rotator) in der Reaktion $^{84}Kr + ^{232}Th$, E_{lab}=371 MeV im "sudden" Grenzfall.

Unterschiede zwischen semiklassischen und quantenmechanischen Resultaten hängt damit zusammen, daß die Integraldarstellung (3.36) der KSM nicht die Zeitumkehrinvarianz erfüllt (siehe Abschnitt 3.3.1). Insbesondere die Berechnung klassisch stark verbotener Übergänge wird davon ungünstig beeinflußt. Der qualitativ ganz falsche Verlauf der Anregungswahrscheinlichkeiten für den Spin J_2=10 und den Spin J_2=18 zu kleineren Streuwinkeln hin (der Abfall der Anregungswahrscheinlichkeiten auf Null wird falsch beschrieben) hat vermutlich seine Ursache darin, daß die Anregungen der Spins dort immer verbotener werden.

Leider lassen sich beide Gründe (Kaustikberührungen, Nichterfüllung der Zeitumkehrinvarianz) in diesem System nur schwer getrennt untersuchen. Zwar zeigen bei Betrachtung eines festen Spins J_2 beide Gründe als Funktion der Kopplungsstärke $\bar{Q}_2$ ein entgegengesetztes Verhalten (nimmt $\bar{Q}_2$ zu, wird der Übergang zu J_2 weniger verboten, aber es treten dafür mehr Kaustikberührungen auf), aber es kommt trotzdem zwischen beiden Gründen für die relativ schlechten Resultate der Integraldarstellung zu Überschneidungen. Betrachten wir beispielsweise im schweren System den Spin J_2=10 (Abb.12), so ist dieser bei Θ=60 sehr stark verboten und man findet viele klassische Bahnen, die die Kaustik berühren.

Insgesamt sieht man am Beispiel des schweren Systems $^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}$=371 MeV mit seiner sehr starken Kopplungsstärke ($\bar{Q}_2 \approx 8.88$) die Grenzen der Anwendbarkeit der Integraldarstellung (3.36) der KSM für zwei innere Freiheitsgrade. Das Ergebnis zeigt, daß es notwendig ist, die Integraldarstellung so zu modifizieren, daß die Kaustikberührungen in richtiger Weise berücksichtigt werden. Dieses Problem ist bis heute nicht gelöst. Damit ist die Integraldarstellung (3.36) bei der Berechnung der Anregungswahrscheinlichkeiten eines starren Rotators auf leichte Systeme beschränkt, für die aber bereits die einfach an-

wendbare deBoer-Winther Rechnung [43a] sehr gute Ergebnisse liefert.

Die ursprünglich gehegte Hoffnung, mit dem in diesem Kapitel diskutierten analytischen Modell für das Problem der Kaustikberührungen einen Lösungsweg zu finden, ist nicht erfüllt worden. Die analytischen Ausdrücke sind immer noch sehr kompliziert. Wir haben deshalb das Auftreten von Kaustikberührungen klassischer Bahnen für die Streuung an dem viel einfacheren eindimensionalen Potential $1/x^2$ (Drehimpulsbarriere) untersucht, das auch weitgehend analytisch behandelt werden kann. Die Verwendung einer ähnlichen Phasenregel für die Determinante $\partial q/\partial q_1$ beim Auftreten von Kaustikberührungen, wie sie bei der uniformen Behandlung des Potentials $1/x^2$ für die Determinante $\partial J/\partial q_1$ verwendet worden ist [31] , führte zu keinen brauchbaren Ergebnissen. Dafür wäre zusätzlich zur Berücksichtigung der richtigen Kaustikphasen noch eine Uniformisierung des Integranden in (3.36) (spezialisiert für das Potantial $1/x^2$) nötig gewesen, da zu viele stationäre Bahnen sehr nahe an der Kaustik liegen. Diese Uniformisierung ist uns nicht gelungen.

Neben diesem sehr schwierigen grundsätzlichen Problem sei noch kurz auf die praktische Seite hingewiesen. Der Aufwand an Rechenzeit für die zweidimensionale Integration des oszillierenden Integranden ist bereits im "sudden" Grenzfall beträchtlich. Die dynamisch vollständige Behandlung des Stoßproblems würde eine zusätzliche numerische Integration der Bewegungsgleichungen (in unserem Beispiel für 181×181 Anfangsbedingungen (β,φ)) erfordern und damit einen sinnvollen Bedarf an Rechenzeit weit übersteigen.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß wegen der auftretenden Kaustikberührungen der klassischen Bahnen auch die Integraldarstellung (3.36) der KSM für die Beschreibung der multiplen Coulombanregung mit zwei inneren Frei-

heitsgraden nicht geeignet ist. Damit scheitert die Integraldarstellung an einem prinzipiellen Problem, während die uniformen Darstellungen prinzipiell möglich aber nicht praktikabel sind [44] . Will man die klassische S-Matrix Theorie dennoch anwenden, ist man gezwungen Näherungen einzuführen. Man kann daran denken, bei dem Coulombanregungsproblem neben der radialen Relativbewegung nur einen inneren Freiheitsgrad vollständig semiklassisch zu behandeln und den verbleibenden Freiheitsgrad in einer Näherung zu berücksichtigen.

Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, daß dieses Vorgehen für die multiple Coulombanregung auf eine brauchbare Formulierung der semiklassischen S-Matrix führt. Es wird sich insbesondere herausstellen, daß auch eine entsprechende eindimensionale Integraldarstellung der KSM gefunden werden kann, bei der keine Kaustikberührungen mehr auftreten.

5. DIE MULTIPLE COULOMBANREGUNG VON ROTATIONSZUSTÄNDEN IN EINER "PLANAREN" NÄHERUNG

Die Ergebnisse von Kapitel 4 zeigen, daß es wegen der besonders bei schweren Schwerionensystemen auftretenden Kaustikberührungen von klassischen Bahnen nicht möglich ist, die multiple Coulombanregung von Rotationszuständen (mit zwei inneren Freiheitsgraden neben der Relativbewegung) durch die Integraldarstellung (3.36) der klassischen S-Matrix (KSM) zu berechnen. Die Beschreibung der multiplen Coulombanregung mit zweidimensionalen uniformen Darstellungen der KSM ist andererseits zu aufwendig [44], als daß diese für praktische Rechnungen in Frage kommen. Insbesondere ist deshalb nicht an eine Anwendung der uniformen Darstellungen über die bisher betrachteten klassisch erlaubten Übergänge hinaus auf klassisch verbotene Übergänge, auf komplexe Kernpotentiale oder auf Probleme mit weiteren inneren Freiheitsgraden zu denken. Ursprünglich gehegte Hoffnungen auf eine problemlose Anwendbarkeit der klassischen S-Matrix Theorie gerade in der Schwerionenkernphysik müssen damit stark reduziert werden.

Um dennoch im Rahmen der klassischen S-Matrix Theorie eine einfache Beschreibung der multiplen Coulombanregung zu bekommen, führen wir eine Näherung zur Vereinfachung des physikalischen Modells ein, die bewirkt, daß statt zwei innerer Freiheitsgrade nur noch ein innerer Freiheitsgrad vollständig semiklassisch behandelt wird, während der zweite innere Freiheitsgrad näherungsweise berücksichtigt wird.

Durch eine solche Reduktion auf ein bezüglich der inneren Anregung eindimensionales Problem werden uniforme Darstellungen sehr einfach anwendbar. Überdies stellt sich heraus, daß für die Beschreibung der multiplen Cou-

lombanregung auch die Integraldarstellung wieder anwendbar ist, da es in der unten diskutierten Näherung zu keinen Kaustikberührungen von klassischen Bahnen kommt.

Wir wählen für den semiklassisch vollständig zu behandelnden Freiheitsgrad die planare Bewegung des Streusystems, da diese den Hauptteil der Anregung zum Spin J liefert, wie man aus deBoer-Winther Rechnungen weiß. Physikalisch kann man sich durch folgende Überlegung plausibel machen, daß die planare Bewegung den Hauptbeitrag zur Anregung liefert und die nichtplanare Bewegung nur noch relativ geringe Korrekturen beiträgt.

Nähert sich das Projektil dem Rotator, der sich am Anfang im Grundzustand (J_1=0) befinden soll, versucht dieser auszuweichen. Wenn die Rotatorachse vor Beginn der Streuung in der Anfangsstreuebene ausgerichtet war (planare Orientierung), ist ein Ausweichen aus Gründen der Drehimpulserhaltung nur innerhalb der Streuebene möglich, so daß das Projektil der zurückweichenden Rotatorachse nacheilen und die Anregung noch vergrößern kann, was höhere Anregungswahrscheinlichkeiten zur Folge hat. Liegt die Orientierung des Rotators dagegen zu Beginn der Streuung außerhalb der Anfangsstreuebene, kann die Rotatorachse dem näherkommenden Projektil stärker zur Seite ausweichen, ohne dorthin verfolgt werden zu können. Die Wechselwirkung wird daher relativ klein bleiben, wodurch die nichtplanare Bewegung verhältnismäßig wenig zur Anregungswahrscheinlichkeit beiträgt.

Als geeignete Darstellung für die vorzunehmende Näherung erweist sich die sogenannte Helizitätsdarstellung, bei der als Quantenzahlen der Spin J des Rotators und die Projektion M (Helizität) des Spins J auf die Verbindungsachse von Projektil und Target auftreten

$$M = \frac{\vec{J}\,\vec{r}}{r} \quad , \tag{5.1}$$

In der Helizitätsdarstellung entspricht die planare Bewegung einer Helizität M=0 (die nichtplanare Bewegung führt zu M≠0). Dadurch wird der Freiheitsgrad der planaren Bewegung gerade durch den Freiheitsgrad des Rotatorspins J beschrieben. In Abschnitt 5.1 werden wir die Bewegungsgleichungen für die Behandlung der planaren Bewegung in der Helizitätsdarstellung ableiten und in Abschnitt 5.2 den zugehörigen Ausdruck für die Integraldarstellung der KSM formulieren.

Hier ist zu betonen, daß die Dynamik des planaren Problems ohne Näherungen klassisch exakt gelöst wird und die Rückkopplung der Targetanregung auf die Relativbewegung (Bahn des Projektils) im Unterschied zu deBoer-Winther Rechnungen vollständig berücksichtigt wird.

In der Molekülphysik ist diese Näherung unter dem Namen "helicity conserving approximation" [71,72] bereits erfolgreich angewendet worden.

Zur geometrischen Berücksichtigung des räumlichen Charakters des Streuprozesses auch bei Beschränkung auf die planare Dynamik werden wir in Abschnitt 5.3 eine streuwinkelabhängige Amplitude für die klassische S-Matrix einführen. Als Orientierung hierfür dient der Spezialfall der multiplen Coulombanregung in Rückwärtsrichtung, der im Rahmen der klassischen S-Matrix Theorie exakt mit einem inneren Freiheitsgrad beschrieben werden kann [30,38-42] , da wegen der Zylindersymmetrie des Streusystems um die Einfallsachse des Projektils der Winkel für die Beschreibung des zweiten inneren Freiheitsgrades eine zyklische Variable ist.

Bei der Rückwärtsstreuung tritt in der klassischen S-Matrix ein Amplitudenfaktor $\sin q_1$ auf [38-42] , der den räumlichen Charakter des Streuprozesses berücksichtigt und durch eine entsprechende Berechnung der Funktionaldeterminante $D(q_1)$ (siehe Kapitel 3) gewonnen werden kann. Wir werden für unsere planare Beschreibung

den Amplitudenfaktor $\sin q_1$ vom Streuwinkel Θ abhängig machen. Dabei wählen wir die Abhängigkeit so, daß das Ein- und Auslaufen des Projektils auf einer mittleren Achse und damit Ähnlichkeiten zur Rückwärtsstreuung simuliert werden. Mit der Einführung der streuwinkelabhängigen Amplitude können bereits recht gute Ergebnisse (Abschnitt 5.4) erzielt werden.

Eine weitere Verbesserung kann man durch näherungsweise Berücksichtigung der nichtplanaren Bewegung im "sudden" Grenzfall erreichen. Hierfür werden wir in Abschnitt 5.5 den Ausdruck für die Integraldarstellung der KSM so korrigieren, daß er mit der quantenmechanischen Beschreibung der multiplen Coulombanregung im "sudden" Grenzfall übereinstimmt.

In Abschnitt 5.6 werden schließlich die Ergebnisse diskutiert, die mit unserer Näherung für leichte und schwere Systeme gewonnen werden können.

Die Anwendung unseres Näherungsverfahrens auf die multiple Coulombanregung von Rotationszuständen bei Schwerionenstößen ist in erster Linie ein Test für die Brauchbarkeit dieser Näherung, da mit der deBoer-Winther Rechnung bereits eine brauchbare Beschreibungsmöglichkeit der multiplen Coulombanregung besteht. Allerdings sind in beiden Verfahren die eingebauten Näherungen verschieden. In der deBoer-Winther Beschreibung wird die Rückkopplung der inneren Anregung auf die Relativbewegung vernachlässigt, im Rahmen dieser Näherung werden aber beide inneren Freiheitsgrade vollständig berücksichtigt. In unserem Verfahren wird der wichtigere innere Freiheitsgrad (die planare Bewegung) samt Rückkopplung auf die Relativbewegung klassisch exakt behandelt, während der zweite weniger wichtige innere Freiheitsgrad (die nichtplanare Bewegung) nur näherungsweise berücksichtigt wird.

5.1. Die Bewegungsgleichungen für M=0

Die vollständige Hamiltonfunktion für multiple Coulombanregung lautet in der Helizitätsdarstellung [25]

$$H(r,q_J,q_M,p,J,M) = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2\mu r^2}\left[I^2+J^2-2M^2+2\cos q_M \times \right.$$
$$\left. \times\sqrt{(I^2-M^2)(J^2-M^2)}\right] + \frac{J^2}{2\mathcal{I}} + \frac{Z_P Z_T e^2}{r} \qquad (5.2)$$
$$+ \frac{Z_P e^2 Q_o^{(2)}}{4\cdot r^3}\left[3\left[1-\frac{M^2}{J^2}\right]\cos^2 q_J - 1\right] \quad .$$

Hier sind I der Gesamtdrehimpuls, J der Rotatorspin, M die Helizität sowie q_J und q_M die zu J und M kanonisch konjugierten Winkelvariablen.

Wir beschränken uns auf die Berücksichtigung der Monopol-Quadrupolwechselwirkung des Coulombpotentials in der Hamiltonfunktion (letzter Term in (5.2)). Höhere Multipole der Wechselwirkung können ohne Schwierigkeiten zugefügt werden, spielen aber in den weiter unten folgenden Beispielen für die Berechnung der multiplen Coulombanregung keine Rolle.

Liegt der Rotator zu Beginn des Streuprozesses in der Streuebene, d.h. sind M_1 und q_M^1 gleich Null, bleiben diese wegen

$$\frac{dq_M}{dt} = \frac{\partial H}{\partial M} = -\frac{M}{\mu r^2}\left\{2+\cos q_M\left[\sqrt{\frac{J^2-M^2}{I^2-M^2}} + \sqrt{\frac{I^2-M^2}{J^2-M^2}}\right]\right\}$$
$$- \frac{Z_P e^2 Q_o^{(2)}}{2r^2}\cdot\frac{3M}{J^2}\cos^2 q_J \qquad (5.3)$$

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_M} = \frac{1}{\mu r^2}\sin q_M \cdot \sqrt{(I^2-M^2)(J^2-M^2)} \qquad (5.4)$$

gleich Null und man erhält aus (5.2) die Hamiltonfunktion für den planaren Fall. Mit den üblichen Parametern (Kapitel 4) leitet man daraus in dimensionslosen Variablen die folgenden Bewegungsgleichungen ab

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\tau}} = \frac{1}{\bar{r}^3}\left[\frac{I^2}{\eta^2} + 2\Lambda\frac{I}{\eta}\bar{J} + \Lambda^2\bar{J}^2\right] + \frac{1}{\bar{r}^2} + \frac{3\Lambda}{2\bar{r}^4}\left[3\cos^2 q_J - 1\right] \tag{5.5}$$

$$\frac{d\bar{r}}{d\bar{\tau}} = \bar{p} \tag{5.6}$$

$$\frac{d\bar{J}}{d\bar{\tau}} = \frac{3}{\bar{r}^3}\sin q_J \cos q_J \tag{5.7}$$

$$\frac{dq}{d\bar{\tau}} = \frac{I}{\eta\bar{r}^2} + \Lambda\frac{\bar{J}}{\bar{r}^2} + \frac{\xi}{2}\bar{J} \quad . \tag{5.8}$$

Die Integration der Bewegungsgleichungen erfolgt mit den Anfangsbedingungen

$$\bar{p} = -\sqrt{1 - \frac{2}{\bar{r}} - \frac{I^2}{\eta^2\bar{r}^2}} \quad , \quad \bar{r}=R \text{ (groß)} \; , \tag{5.9}$$

$$\bar{J} = \bar{J}_1 = 0 \quad , \quad q_J = q_J^1 \tag{5.10}$$

und geschieht analog zu Kapitel 2 über die Abweichung von der Coulombbahn in der hyperbolischen Parametrisierung (2.8) von w=-7 bis w=+7. Am Ende der Integration wird der exakte Coulombanteil wieder hinzuaddiert.

Simultan zu den Bewegungsgleichungen werden

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -\eta\,\bar{r}\,\frac{d\bar{p}}{d\tau} - 2\bar{Q}_2 \cdot q_J\,\frac{d\bar{J}}{d\tau} \qquad (5.11)$$

für die klassische Wirkung (Phase der klassischen S-Matrix) und die Stabilitätsgleichungen bezüglich q_J^1 [Anhang III] integriert. Letztere erhält man durch Differenzieren der Bewegungsgleichungen nach q_J^1 . Ihre Lösungen ergeben die in die Integraldarstellung (3.36) bzw in die Airynäherung [Anhang I] einzusetzenden Amplitudenfaktoren $\partial q_J / \partial q_J^1$ und $\partial J / \partial q_J^1$. Ferner werden für die Integraldarstellung noch die reduzierte Winkelvariable $\bar{q}_J$ und deren Ableitung nach dem Anfangswinkel q_J^1 benötigt. Entsprechend (3.20) erhält man für $\bar{q}_J$

$$\bar{q}_J = q_J - \int_T^{\bar{r}} \frac{d\bar{r}'}{\bar{p}} \left[\frac{\xi}{2}\,\bar{J} + \frac{I+2\bar{Q}_{2J}\bar{J}}{\eta_J\,\bar{r}^2} \right]$$

$$= q_J - \frac{\xi}{2}\,\bar{J}\left[\bar{p}_J\,\bar{r}_J + \ln\left[\bar{r}_J\bar{p}_J+\bar{r}_J-1\right] - \ln \xi_J\right] \qquad (5.12)$$

$$+ \frac{(I+2\bar{Q}_{2J}\bar{J})}{|I+2\bar{Q}_{2J}\bar{J}|}\left\{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left[\frac{\bar{r}_J + \xi_J^2 - 1}{\bar{r}_J\,\xi_J}\right]\right\} .$$

a_{oJ}, ξ_J, η_J, und $\bar{Q}_{2J}$ sind analog zu (2.9)-(2.11) und (4.7) im Ausgangskanal mit dem Spin J und der daraus resultierenden Relativgeschwindigkeit v_J definierte Parameter. $\bar{p}_J$ und $\bar{r}_J$ sind durch

$$\bar{p}_J = \bar{p}\,\frac{v_1}{v_J} \quad , \quad \bar{r}_J = \bar{r}\,\frac{a_o}{a_{oJ}} \qquad (5.13)$$

definiert. Als untere Grenze "T" in (5.12) wählen wir den jeweiligen Umkehrpunkt (ξ_J + 1) der zu $\bar{p}_J$ und $\bar{r}_J$ gehörenden Coulombbahn. Die Ableitung von $\bar{q}_J$ nach q_J^1 er-

hält man aus $\partial q_J / \partial q_J^1$ und der Integration der Stabilitätsgleichungen entlang der Coulombbahnen im Endkanal [Anhang III] . Damit sind alle Größen bestimmt, die man zur Berechnung der klassischen S-Matrix benötigt.

5.2. Die klassische S-Matrix für die planare Bewegung

Mit der gleichen Begründung wie in Abschnitt 4.2 schreiben wir die Anregungswahrscheinlichkeit als

$$P_{J_2}(\Theta) = \left| S^I_{J_2 O} \right|^2 \quad , \quad \Theta = 2 \arctan \frac{\eta}{I} \quad . \tag{5.14}$$

Hier sind die Quantenzahlen des Eingangskanals wieder der Übersicht halber weggelassen. Da wir bisher allein die planare Bewegung betrachten, treten in (5.14) nur S-Matrixelemente mit der Helizität $M_2=0$ auf.

Die Herleitung von (5.14) berücksichtigt, daß nur die freie Coulombphase als Funktion von I rasch veränderlich ist. Von Möhring [65] durchgeführte Rechnungen, in denen die Näherung der stationären Phase an die Streuamplitude nicht allein mit der freien Coulombphase sondern mit der Gesamtphase durchgeführt worden ist, zeigen nur geringfügige Änderungen in der Anregungswahrscheinlichkeit $P_{J_2}(\Theta)$. Der Ausdruck (5.14) ist daher eine gute Näherung.

Aus (3.36) und (3.37) erhält man mit

$$N_1 = N_2 = \pi \quad , \quad D(q_1) = D(\bar{q}) = 1 \tag{5.15}$$

für die Integraldarstellung (ID) der klassischen S-Matrix

$$S^{ID}_{J_2 O} = \frac{\sqrt{2J_2+1}}{\pi} \int_0^{\pi} dq_1 \, P_{J_2}(\cos \bar{q}) \sqrt{\frac{\partial \bar{q}}{\partial q_1}} \; e^{i\Delta} \quad . \tag{5.16}$$

Die Phase Δ lautet

$$\Delta = -\eta \int_1^p \bar{r}\, d\bar{p}' - 2\bar{Q}_2 \int_1^J q\, d\bar{J}' + \eta_J \int_T^p \tilde{r}\, d\tilde{p}'$$
$$- \eta_2 \int_T^2 \tilde{r}_2\, d\tilde{p}_2' - \eta \ln\left[\frac{2}{\hbar}\bar{p}_1\bar{r}_1 + \frac{2}{a_o}\bar{r}_1 - 2\right] \qquad (5.17)$$
$$+ 2\bar{Q}_2\bar{J}\bar{q} + \eta_2 \ln\left[\frac{2}{\hbar}\bar{p}_2\bar{r}_2 + \frac{2}{a_{o2}}\bar{r}_2 - 2\right] .$$

Der Index J an den Winkelvariablen q und $\bar{q}$ ist hier und im weiteren weggelassen. Analog zu Kapitel 4 ist in (5.16) statt der semiklassischen Wellenfunktionen des Rotators im Endkanal ($\sim \exp(-iJ_2\bar{q})$) die quantenmechanische Eigenfuktion ($\sim P_{J_2}(\cos\bar{q})$) eingesetzt worden. Der Ausdruck (5.16) stellt die Integraldarstellung der klassischen S-Matrix zur Beschreibung der multiplen Anregung von Rotationszuständen unter Berücksichtigung der einfachen planaren Bewegung des Streusystems dar. Im folgenden Abschnitt werden wir eine Verbesserung der einfachen planaren Näherung (5.16) diskutieren, die man erhält, indem der räumliche Charakter des Streuprozesses auch in der planaren Näherung beachtet wird.

5.3. Eine streuwinkelabhängige Amplitude in der klassischen S-Matrix zur Berücksichtigung des räumlichen Charakters des Streuprozesses

Wir werden in diesem Abschnitt durch Einführung einer vom Streuwinkel Θ abhängigen Amplitude für die klassische S-Matrix den fehlenden räumlichen Charakter in (5.16) näherungsweise berücksichtigen. Bei der Bildung von (5.16) aus (3.36) sind nämlich, bedingt durch die Beschränkung auf die planare Bewegung, das "Volumenelement" (r D(q)dq)

sowie die semiklassischen Amplituden (3.29) und (3.31) aus der Transformation von den ebenen kartesischen Koordinaten auf die Kreiskoordinaten gewonnen worden. Daher fehlt in (5.16) jegliche geometrische Berücksichtigung des räumlichen Charakters des Streuprozesses, der trotz der Beschränkung auf die planare Dynamik weiter vorhanden ist.

Ausgangspunkt für die Herleitung der streuwinkelabhängigen Amplitude ist der Spezialfall der multiplen Coulombanregung in Rückwärtsrichtung (kollinearer Stoß). In diesem Spezialfall, der im Rahmen der klassischen S-Matrix Theorie exakt beschrieben werden kann, tritt in der Amplitude der klassischen S-Matrix ein Faktor $\sin q_1$ auf [38-42] . Dieser Faktor stammt aus der Funktionaldeterminante $D(q_1)$ für den Übergang von räumlichen kartesischen Koordinaten zu Kugelkoordinaten und er hat daher keine dynamische sondern eine geometrische Bedeutung. In [38] wird der Faktor $\sin q_1$ mit einer anschaulichen Begründung eingeführt. Er beschreibt im Fall der Rückwärtsstreuung die Fläche eines Kreisringes um $q_1=0$. Liegt die Rotatorachse vor der Streuung in diesem Kreisring mit der Dicke Δq_1 so wird der Spin J nach der Streuung in einem Intervall ΔJ liegen (Abbildung 13). Die Wahrscheinlichkeit in dieses Intervall ΔJ zu gelangen ist direkt proportional zur Fläche des Kreisringes, also zu $\sin q_1$ [38] . Deutlich werden diese Überlegungen in den uniformen Darstellungen, da hier nur ausgewählte klassische Bahnen zur S-Matrix beitragen, während in der Integraldarstellung die anschauliche Deutung durch die Integration über alle Rotatororientierungen q_1 etwas leidet.

Wir betrachten nun bei endlichem Streuwinkel den planaren Fall. Die Bahn des Projektils kann in erster Näherung als ungestörte Coulombhyperbel angenommen werden. In der Tat zeigen alle unsere Rechnungen, daß selbst bei starken Anregungen (bis J=12 im System $^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=$ 371 MeV) der wahre Streuwinkel nicht sehr vom Coulomb-

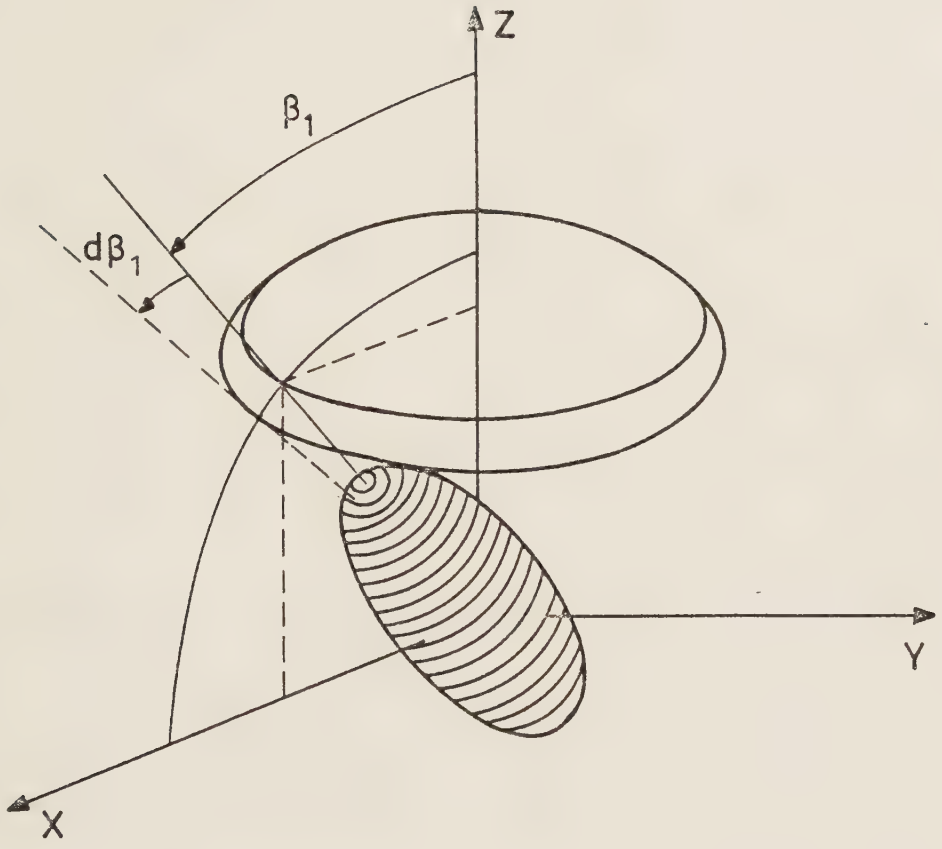

Abbildung 13 : Die Anfangsorientierung des Rotators (Target). Die Wahrscheinlichkeit, daß die Symmetrieachse des Rotators im Kreisring zwischen β_1 und $\beta_1 + d\beta_1$ liegt, ist proportional zu $\sin\beta_1$. Bei Einlaufen des Projektils auf der z-Achse (Streuwinkel $\Theta = 180^o$) führen die Orientierungen der Symmetrieachse des Rotators im Intervall $d\beta_1$ zur Anregung im Spinintervall ΔJ.

streuwinkel Θ (4.21) abweicht (siehe auch [74]). Die Achse der Coulombhyperbel ist um den Winkel $(\pi/2-\Theta/2)$ gegenüber der Einlaufrichtung des Projektils verschoben.

Sowohl die Ergebnisse von Donangelo [41] , wie auch unsere Rechnungen zeigen (Abbildung 14) , daß das Target im wesentlichen nur in der Nähe des "closest approach" angeregt wird und daher der Verlauf der klassischen Bahnen für größere Abstände kaum Einfluß auf die Anregung ausübt . Man kann sich deshalb , ähnlich wie im extremen Grenzfall der multiplen Coulombanregung in Rückwärtsrichtung, Kreisringe von Rotatororientierungen (Abb.13) um die Hyperbelachse vorstellen, die zu gleichen Rotatorendspins J führen. Die Achse der Kreisringe ist aber nun gegenüber der Rückwärtsrichtung um den Winkel $(\pi/2-\Theta/2)$ verschoben.

Besonders deutlich bestätigen sich diese Überlegungen bezüglich der Winkelverschiebung bei Betrachtung der Quantenzahlfunktion $J=J(q_1)$. In Abbildung 15 sind die Quantenzahlfunktionen des Systems $^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=$ 371 MeV für verschiedene Streuwinkel Θ aufgetragen. Man kann deutlich erkennen (siehe auch Tabelle 5), daß die Nullstellen in recht guter Näherung um den Winkel $(\pi/2-\Theta/2)$ gegenüber den Nullstellen bei Rückwärtsstreuung , die stets bei $q_1=0°, 90°, 180°$ liegen, verschoben sind.

Demnach geschieht die Rotatoranregung näherungsweise so, als ob sich das Projektil auf einer mittleren Achse zwischen der wirklichen ein- und auslaufenden Projektilbahn bewegen würde.

Wir ersetzen nun die Formulierung (5.16) zur Beschreibung der planaren Bewegung durch einen Ausdruck, der die dreidimensionalen Funktionaldeterminanten enthält und der bei endlichen Streuwinkeln Θ die Verschiebung der Kreisringe (Abb.13) berücksichtigt. Mit

$$N_1 = N_2 = 2,\ D(q_1) = \sin\tilde{q}_1\ ,\quad D(\bar{q}) = \sin\bar{q} \qquad (5.18)$$

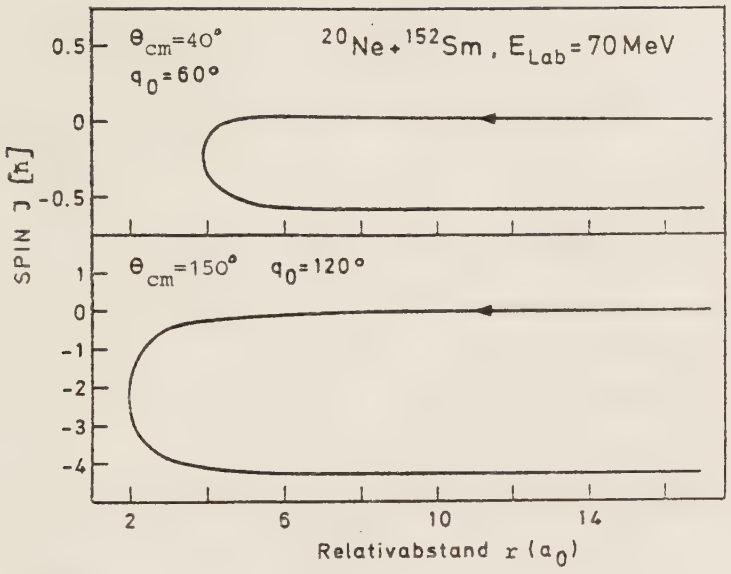

Abbildung 14a : Die Spinquantenzahl J als Funktion des Relativabstandes r (der Zeit t) für zwei representative klassische Bahnen im leichten System $^{20}Ne+^{152}Sm, E_{lab}=70$ MeV. Die Anregung findet hauptsächlich in der Nähe des kleinsten Relativabstandes r_T statt (zwischen r_T und 2 r_T).

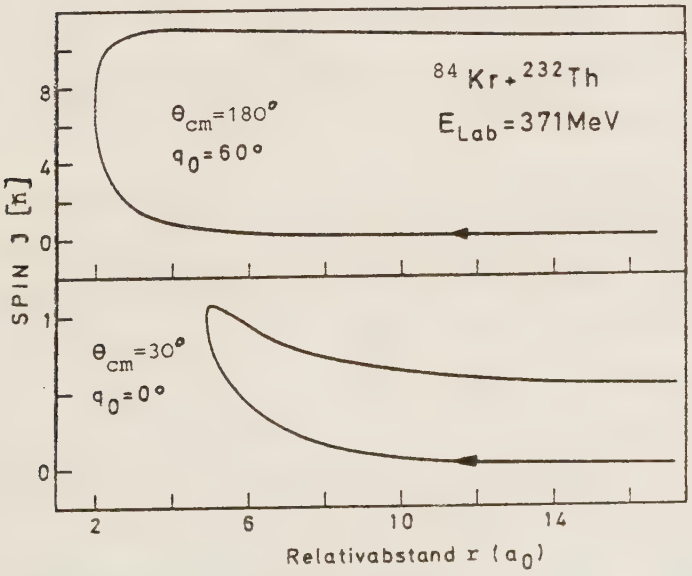

Abbildung 14b : Siehe Abb.14a , aber für das schwere System $^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=371$ MeV.

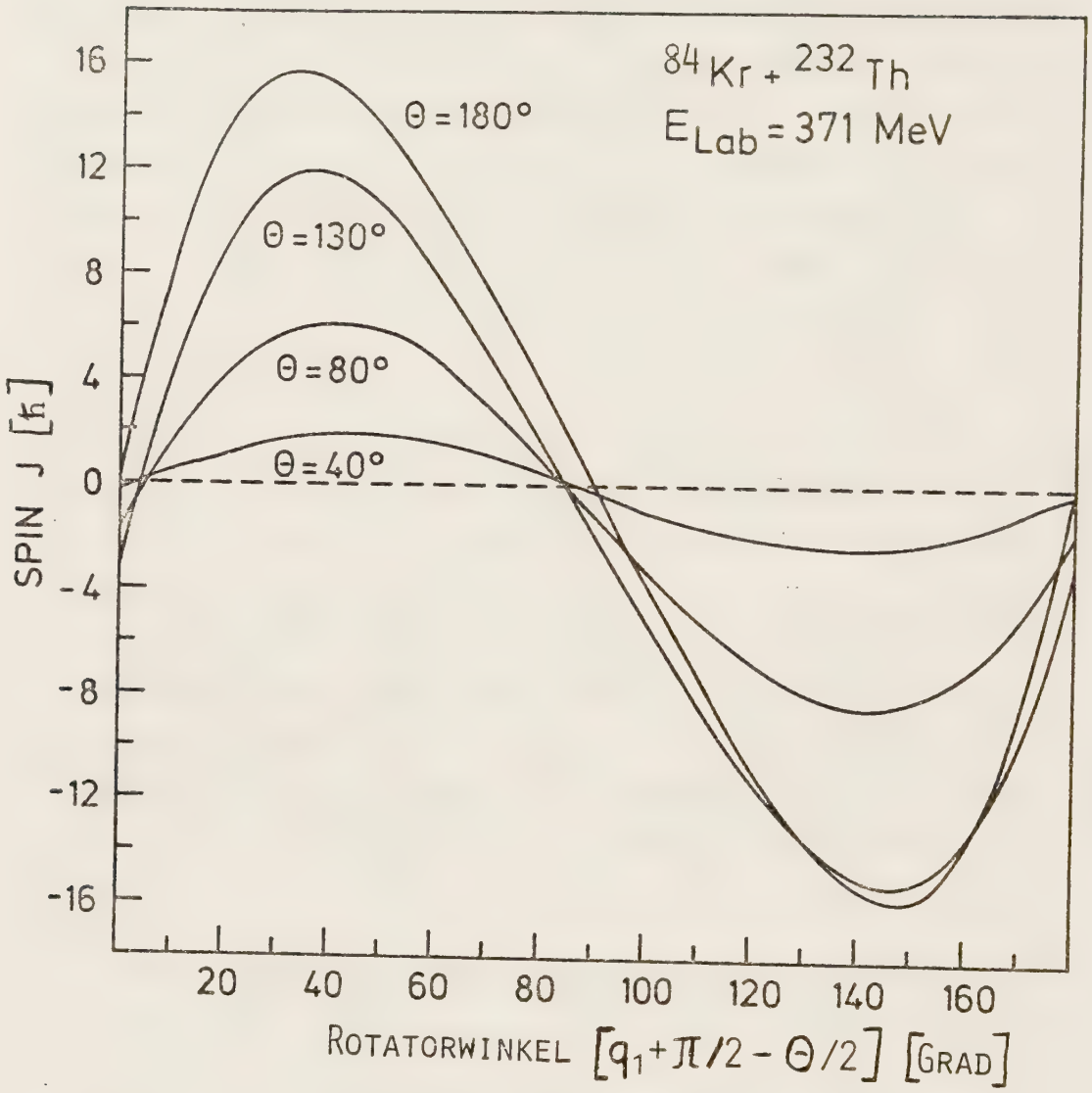

Abbildung 15 : Die Quantenzahl J als Funktion der Rotatoranfangsorientierung $\tilde{q}_1 = q_1 + \pi/2 - \Theta/2$ für verschiedene Streuwinkel Θ im schweren System $^{84}Kr + ^{232}Th, E_{lab} = 371$ MeV. Die Auftragung über $\tilde{q}_1$ statt über q_1 zeigt, daß die Phase der Quantenzahlfunktion $J = J(q_1)$ für den Streuwinkel Θ gegenüber der Phase der Quantenzahlfunktion für Rückwärtsstreuung fast genau um $\pi/2 - \Theta/2$ verschoben ist und somit durch die Achse der Coulombhyperbel zum Streuwinkel Θ bestimmt wird.

Coulomb-streuwinkel (Grad)	q_1^e	q_1	q_1^e	q_1
180	90.0	90.0	180.0	180.0
150	75.0	70.9	165.0	167.7
130	65.0	59.3	155.0	159.2
100	50.0	43.8	140.0	145.6
80	40.0	34.4	130.0	135.3
60	30.0	25.6	120.0	124.5
40	20.0	17.0	110.0	113.0
30	15.0	12.8	105.0	117.3

Tabelle 5 : Die Nullstellen der Quantenzahlfunktion $J=J(q_1)$ für einige Streuwinkel Θ . Unter q_1 sind die Werte der tatsächlichen Nullstellen von J aufgeführt. Unter q_1^e sind die Werte der Nullstellen von J aufgeführt, die sich durch eine Verschiebung der Nullstellen für Rückwärtsstreuung ($q_1=90^o, 180^o$) um ($\pi/2-\Theta/2$) ergeben. Vergleiche auch Abb.15.

folgt aus (3.36)

$$S^{ID}_{J_2 O} = \frac{\sqrt{2J_2+1}}{2} \int_0^{\pi} dq \; P_{J_2}(\cos \bar{q}) \sqrt{\sin \tilde{q}_1 \; \sin \bar{q}} \sqrt{\frac{\partial \bar{q}}{\partial q}} \; e^{i\Delta} \,, \tag{5.19}$$

Hier ist die Phase Δ durch (5.17) gegeben. Der Term

$$\sin \tilde{q}_1 = \sin(q_1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}) \tag{5.20}$$

dient der Beschreibung der Kreisringe um die (vom Streuwinkel Θ abhängige) verschobene Achse, die zu gleichen Endspins J führen.

Die Integraldarstellung (5.19) der klassischen S-Matrix sollte in guter Näherung den Teil der multiplen Coulombanregung von Rotationszuständen beschreiben, der durch die planare Bewegung des Streusystems verursacht wird und der den Hauptbeitrag zu den Anregungswahrscheinlichkeiten der Rotationszustände liefert.

Für die Integraldarstellung (5.19) kann man analytisch die Richtigkeit und die Notwendigkeit des Amplitudenfaktors (5.20) für die beiden extremen Grenzfälle Vorwärts- und Rückwärtsstreuung zeigen. Für Rückwärtsstreuung geht $\tilde{q}_1$ in q_1 über und man erhält den im Rahmen der klassischen S-Matrix Theorie exakten Ausdruck [40-42] . Für sehr große Partialwellen wird die Phase (5.17) von q_1 unabhängig, da keine inelastische Wechselwirkung mehr vorhanden ist. Die reduzierte Winkelvariable $\bar{q}$ (5.12) wird mit J=0 gleich $\tilde{q}_1$ und die Ableitung $\bar{q}/\, q_1$ ist gleich Eins. Somit gilt für die S-Matrix (5.19) in diesem Grenzfall

$$S^{ID}_{J_2 O} = \frac{\sqrt{2J_2+1}}{2} \int_0^{\pi} dq_1 \; P_{J_2}(\cos \tilde{q}_1) \; \sin \tilde{q}_1$$

$$= \delta_{J_2 O} \quad . \tag{5.21}$$

Wie physikalisch zu fordern ist, wird bei extremer Vorwärtsstreuung nur elastisch gestreut. Jede andere Amplitude, die asymptotisch nicht $\sin(q_1 + \pi/2)$ liefert, gibt bei Vorwärtsstreuung eine Verschmierung von $\delta_{J_2 O}$ über viele Rotationszustände. Die streuwinkelabhängige Amplitude $\sin \tilde{q}_1$ führt somit im Rahmen der klassischen S-Matrix Theorie für die beiden Grenzfälle der Streuung auf die exakten Resultate und sollte deshalb auch für mittlere Winkel eine brauchbare Approximation sein.

In Anhang I werden wir aus (5.19) die uniforme Airynäherung der klassischen S-Matrix ableiten, die im nächsten Abschnitt dem Vergleich mit den Resultaten der Integraldarstellung dient.

5.4. Ergebnisse mit der streuwinkelabhängigen Amplitude in der S-Matrix

In diesem Abschnitt werden die mit der Integraldarstellung (5.19) bzw. mit der uniformen Airynäherung (I.22) erzielten Resultate im Vergleich mit deBoer-Winther Rechnungen und sofern möglich mit quantenmechanischen Rechnungen mit gekoppelten Kanälen diskutiert.

5.4.1. Vergleich mit anderen Amplitudenfaktoren

Wir werden in diesem Abschnitt den Effekt der Einführung des Amplitudenfaktors (5.20) demonstrieren. Dazu werden Resultate von semiklassischen Rechnungen verglichen, die mit der einfachen planaren Näherung (5.16), mit der vollen planaren Näherung (5.19) und mit dem Amplitudenfaktor $\sin q_1$ für Rückwärtsstreuung an Stelle von $\sin \tilde{q}_1$ (5.20)

in (5.19) durchgeführt worden sind.In der uniformen Airynäherung (I.22) werden die Amplituden entsprechend variiert.

In Abbildung 16 sind die für das leichte System $^{20}Ne+^{152}Sm, E_{lab}=70$ MeV mit der uniformen Airynäherung berechneten Winkelverteilungen des elastischen Kanals ($J_2=0$) aufgetragen. Verglichen wird mit einer quantenmechanischen Rechnung mit gekoppelten Kanälen [46] , bei der aber nur der 0^+- und der 2^+-Zustand berücksichtigt sind. Die Mitnahme aller Kanäle in den semiklassischen Rechnungen führt bei Rückwärtswinkeln, wo die Resultate mit den Amplitudenfaktoren $\sin\tilde{q}_1$ und $\sin q_1$ im Rahmen der klassischen S-Matrix Theorie exakt werden, zu einer geringen Absenkung der semiklassisch berechneten Anregungswahrscheinlichkeiten gegenüber den quantenmechanischen Ergebnissen. Die von uns eingeführte streuwinkelabhängige Amplitude $\sin\tilde{q}_1$ (5.20) gibt gute Übereinstimmung mit der quantenmechanischen Rechnung und erweist sich als wesentlich besser gegenüber den anderen verwendeten Amplituden.

Noch deutlicher kann die Wirkung der Amplitude $\sin\tilde{q}_1$ im schweren System $^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=371$ MeV [73] mit seiner starken Struktur in den Winkelverteilungen gesehen werden. In Abbildung 17 sind die Ergebnisse der mit der Integraldarstellung durchgeführten Rechnungen für den elastischen Kanal ($J_2=0$) aufgetragen. Abbildung 18 enthält die Resultate der uniformen Airynäherung für den ersten angeregten Zustand ($J_2=2$). Verglichen wird in beiden Abbildungen mit deBoer-Winther Rechnungen, da quantenmechanische Rechnungen mit gekoppelten Kanälen für dieses schwere Sytem nicht mehr möglich sind.

Man sieht in den Abbildungen 17 und 18 , daß im schweren System der Einfluß der Amplitudenfaktoren auf die Tiefe der Minima besonders stark ausgeprägt ist.

Aus allen drei Abbildungen kann man klar erkennen, daß die streuwinkelabhängige Amplitude $\sin\tilde{q}_1$ nicht nur deutlich bessere Ergebnisse liefert als die anderen Am-

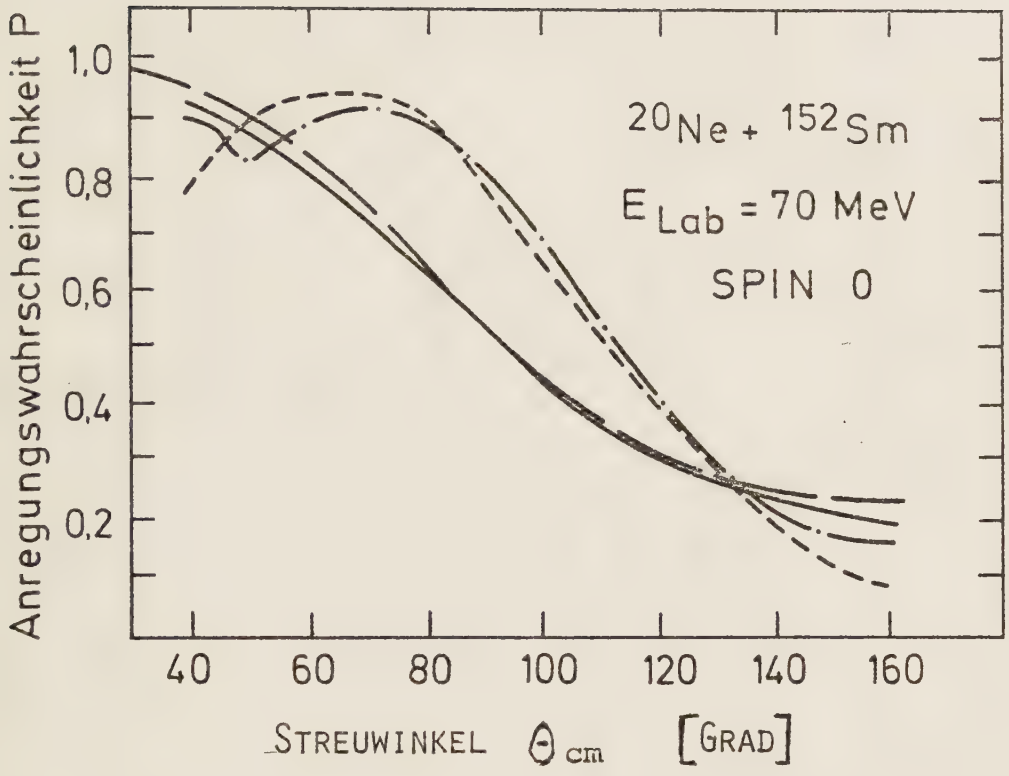

Abbildung 16 : Vergleich von Winkelverteilungen der Anregungswahrscheinlichkeit für den elastischen Kanal des leichten Systems $^{20}Ne+^{152}Sm$, E_{lab}= 70 MeV. Die Winkelverteilungen sind mit verschiedenen Amplitudenfaktoren in der uniformen Airynäherung (I.22) berechnet worden [$\sin\tilde{q}_1$ (I.22): ——— /$\sin q_1$ statt $\sin\tilde{q}_1$ in (I.22):·——·——/ $2/\pi$ statt $\sin\tilde{q}_1$ in (I.22): ----] . Die quantenmechanische Rechnung [—— ——] stammt aus [46] .

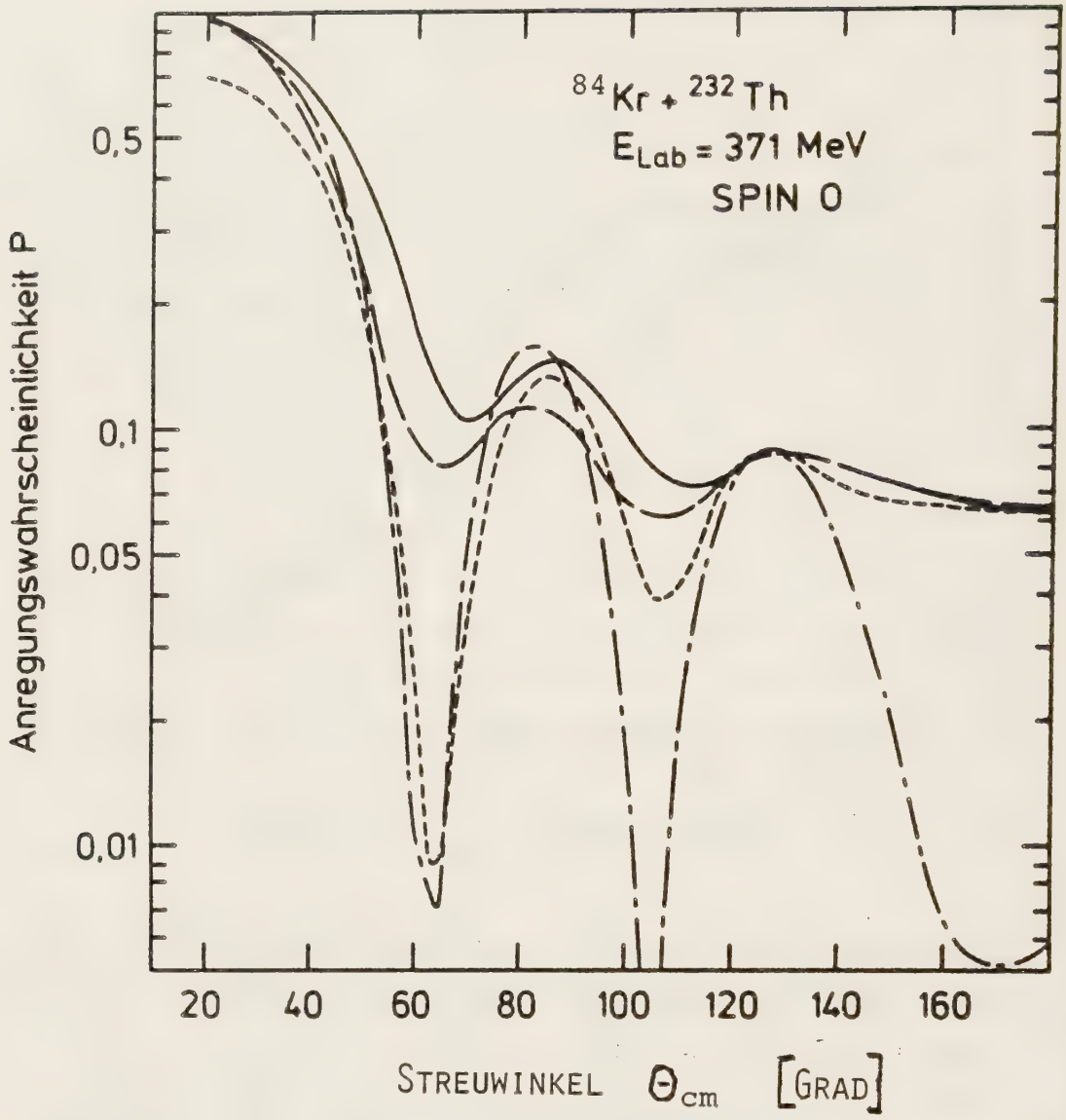

Abbildung 17 : Vergleich von Winkelverteilungen der Anregungswahrscheinlichkeit für den elastischen Kanal des schweren Systems $^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}$=371 MeV.Die Winkelverteilungen sind mit verschiedenen Amplitudenfaktoren in der Integraldarstellung berechnet worden [volle planare Näherung (5.19): ——— / einfache planare Näherung (5.16):-———-———-/ $\sin q_1$ statt $\sin \tilde{q}_1$ in (5.19): ----]. Zum Vergleich dient eine deBoer-Winther Rechnung [— — —] [43a].

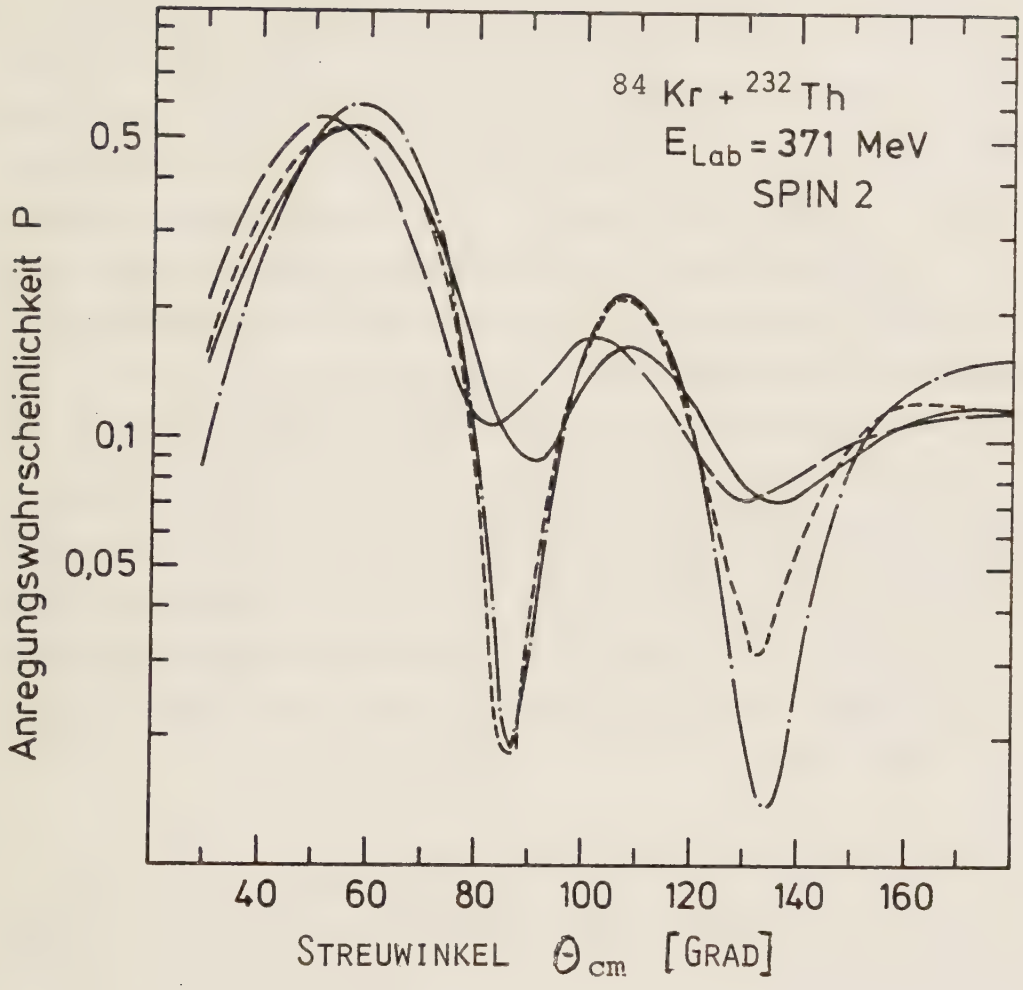

Abbildung 18 : Vergleich von Winkelverteilungen der Anregungswahrscheinlichkeit für den ersten angeregten Zustand (2^+) von ^{232}Th in der Reaktion ^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=371 MeV. Die Winkelverteilungen sind mit verschiedenen Amplitudenfaktoren in der uniformen Airynäherung (I.22) berechnet worden [sin $\tilde{q}_1$ (I.22): ——— / sin q_1 statt sin $\tilde{q}_1$ in (I.22): ·——·——·/ $2/\pi$ statt sin $\tilde{q}_1$ in (I.22): ------]. Zum Vergleich dient eine deBoer-Winther Rechnung [—— —— ——] [43a].

plituden, sondern auch bereits recht gut über den gesamten Winkelbereich mit quantenmechanischen Rechnungen bzw. mit deBoer-Winther Rechnungen übereinstimmt. Insbesondere zeigt sich damit auch die Verbesserung, die man durch die Berücksichtigung des räumlichen Charakters des Streuprozesses in der vollen planaren Näherung (5.19) gegenüber der einfachen planaren Näherung (5.16) erreichen kann. Qualitativ zeigen beide von uns verwendeten Darstellungen (Integraldarstellung,uniforme Airynäherung) dieselben Effekte bei Variation der Amplitude.

Ersetzt man in $\tilde{q}_1$ den Coulombstreuwinkel Θ (4.21) durch den wahren Streuwinkel der klassischen Bahnen, erhält man nur geringfügige Änderungen der Anregungswahrscheinlichkeiten. Dies ist wegen der geringen Abweichungen der wahren klassischen Bahnen von den Coulombhyperbeln [74] auch nicht anders zu erwarten. Wir werden unsere Rechnungen stets mit dem Coulombstreuwinkel Θ in (5.20) durchführen.

5.4.2. Die Wahl der Quantisierung

Bei der Lösung der Bewegungsgleichungen (5.5)-(5.8) und damit bei der Berechnung der Anregungswahrscheinlichkeiten im vorigen Abschnitt wurde als Anfangsbedingung $J_1=0$ (5.10) gewählt, was einer ganzzahligen Quantisierung des Anfangszustandes entspricht. Die recht guten Ergebnisse mit der streuwinkelabhängigen Amplitude $\sin\tilde{q}_1$ geben uns nun die Möglichkeit, die in der Semiklassik zulässigen Quantisierungen von Anfangs- und Endzustand zu untersuchen.

Üblicherweise wird der Drehimpuls in semiklassischen Näherungen nach der Regel

$$|\vec{J}| = \sqrt{J\,(J+1)} \approx J + \frac{1}{2} \qquad (5.22)$$

quantisiert [80]. Diese Quantisierung ist insbesondere für große Drehimpulse gut. Im Eingangskanal soll der Rotator sich im Grundzustand befinden. Hier stellt sich die Frage , ob der Grundzustandsspin mit 0 oder mit 1/2 (wie nach obiger Regel) angesetzt wird. Für J=0 gäbe die Wurzel in (5.22) $|\vec{J}|=0$. Weiter fällt für das planare Streuproblem mit nur einem inneren Freiheitsgrad der Gesamtdrehimpuls J des Targets mit der Projektion von J auf die z-Achse (senkrecht zur Streuebene) zusammen. Die für den quantenmechanischen Drehimpuls charakteristische Unschärfe, die im Eigenwert $\sqrt{J(J+1)}$ oder semiklassisch durch J+1/2 zum Ausdruck kommt, verschwindet in dem Fall. Von daher wäre auch eine ganzzahlige Quantisierung des Endspins zu verstehen. Die drei denkbaren Quantisierungen in den semiklassischen Rechnungen für den Übergang vom Anfangs- zum Endzustand

$$0 \longrightarrow N$$

$$0 \longrightarrow N + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \longrightarrow N + \frac{1}{2}$$

wo N eine positive ganze Zahl ist, sind mit dem leichten System $^{20}Ne+^{152}Sm, E_{lab}=70$ MeV untersucht worden. In Abbildung 19 sind die Ergebnisse der uniformen Airynäherung (I.22) mit der quantenmechanischen Rechnung mit gekoppelten Kanälen [46] verglichen. Deutliche Abweichungen von der quantenmechanischen Rechnung zeigt die Quantisierung $0 \rightarrow N$, während beide anderen Quantisierungen über einen weiten Winkelbereich nahezu identische Resultate liefern. Erst zu Vorwärtswinkeln zeigt die Quantisierung $1/2 \longrightarrow N+1/2$ eine deutlich schlechtere Übereinstimmung mit der quantenmechanischen Rechnung gegenüber der Quantisierung $0 \rightarrow N+1/2$. In Abbildung 20 sind für das schwere System $^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=371$ MeV die Quanti-

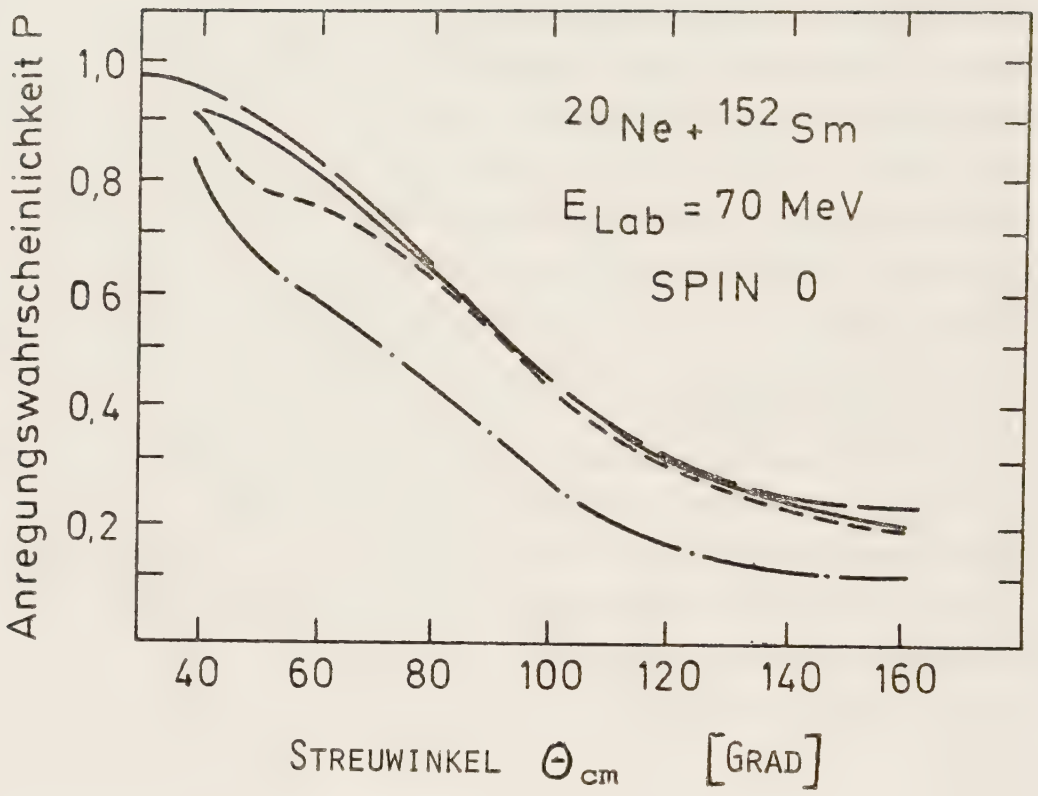

Abbildung 19 : Vergleich von Winkelverteilungen der Anregungswahrscheinlichkeit für den elastischen Kanal des leichten Systems $^{20}Ne+^{152}Sm$, E_{lab}= 70 MeV. Die Winkelverteilungen sind mit der uniformen Airynäherung (I.22) bei Variation der Quantisierung für die Spinquantenzahlen J_1 und J_2 berechnet worden

[O → N+1/2 : ——— / 1/2 → N+1/2 : -------- / O → N : ·——·——·].

Die quantenmechanische Rechnung [—— —— ——] stammt aus [46] .

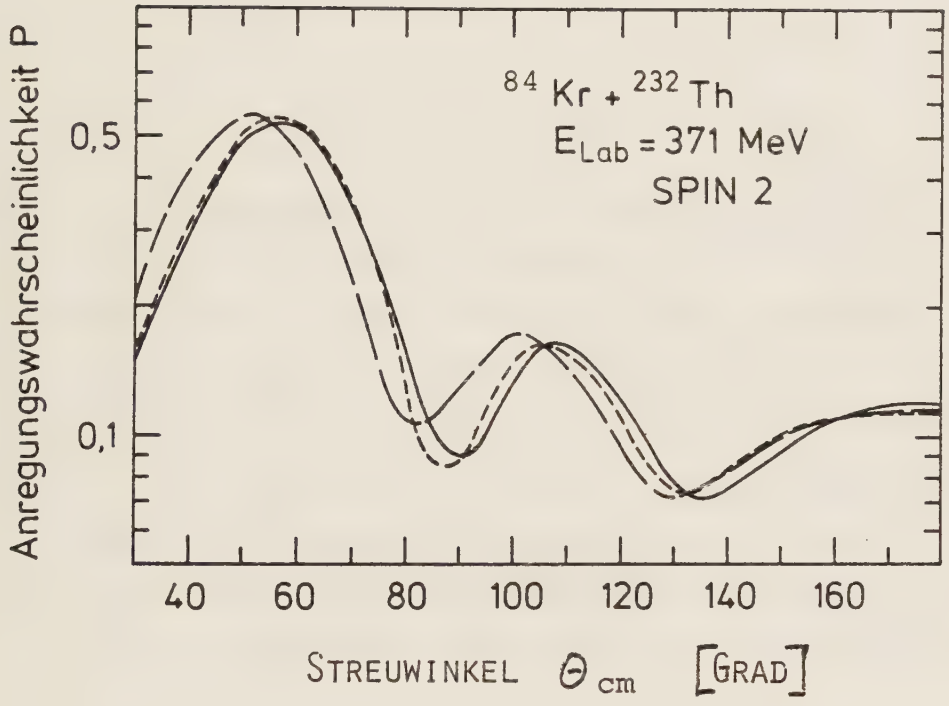

Abbildung 20 : Vergleich von Winkelverteilungen der Anregungswahrscheinlichkeit für den ersten angeregten Zustand (2^+) von ^{232}Th in der Reaktion ^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=371 MeV, Die Winkelverteilungen sind mit der uniformen Airynäherung (I.22) bei Variation der Quantisierung für die Spinquantenzahlen J_1 und J_2 berechnet worden [$0 \longrightarrow N+1/2$: ——— / $1/2 \longrightarrow N+1/2$:-----]. Zum Vergleich dient eine deBoer-Winther Rechnung [— — —][43a].

sierungen $0 \rightarrow N+1/2$ und $1/2 \rightarrow N+1/2$ der uniformen Airynäherung mit deBoer-Winther Rechnungen verglichen. Hier erscheint die Quantisierung $1/2 \rightarrow N+1/2$ ein wenig besser als die Quantisierung $0 \rightarrow N+1/2$.

Wir werden uns in den weiteren Untersuchungen in Übereinstimmung mit anderen Autoren [38,41,44] auf die Quantisierung $0 \rightarrow N+1/2$ beschränken. Dadurch sind bei kleinen Streuwinkeln Θ mit flacher Quantenzahlfunktion $J=J(q_1)$ zwar auch die Übergänge in den elastischen Kanal klassisch verboten und die uniforme Airynäherung liefert dafür keine guten Resultate mehr. Aber dies stellt keine besondere Beeinträchtigung dar, da die uniforme Airynäherung unabhängig von der Wahl der Quantisierung bei kleinen Streuwinkeln (fast-elastischer Stoß) grundsätzlich zu schlechten Ergebnissen führt (siehe Anhang I). Im übrigen paßt die Wahl von $J_1=0$ besser zur anschaulichen Begründung für die Ableitung des streuwinkelabhängigen Amplitudenfaktors $\sin \tilde{q}_1$, als ein von Null verschiedener Anfangsspin J_1.

5.4.3. Die Unitarität der klassischen S-Matrix

Ein pauschales Kriterium für die Güte der Darstellungen ist die Erfüllung der Unitarität. In den Tabellen 6 und 7 sind für die uniforme Airynäherung und die Integraldarstellung die Summe aller Anregungswahrscheinlichkeiten bei einigen Streuwinkeln aufgetragen; zusätzlich ist dies auch für die uniforme Airynäherung mit den in den Abbildungen 16 bzw. 18 verwendeten Amplitudenfaktoren gemacht worden. Im Idealfall sollte die Summe aller Anregungswahrscheinlichkeiten gleich Eins sein.

Die uniforme Airynäherung erfüllt die Unitaritätsbedingung in beiden Systemen fast unabhängig von der Wahl des Amplitudenfaktors über einen weiten Winkelbereich recht gut, wird aber bei Vorwärtswinkeln aus mathematischen Gründen zu groß (siehe Anhang I). Die Integraldarstellung erfüllt die Unitaritätsbedingung im leichten System $^{20}Ne+^{152}Sm, E_{lab}=$

Coulomb-streuwinkel (Grad)	Airy(W)	Airy(R)	Airy	ID
20	1.649	1.650	0.680	0.999
40	0.978	0.959	0.787	0.995
60	0.956	1.056	1.019	0.990
80	0.933	1.223	1.122	0.984
100	0.945	1.151	1.114	0.979
120	0.990	1.087	1.060	0.976
140	1.005	0.972	1.008	0.979
160	1.001	0.961	0.977	0.986

Tabelle 6 : Die Unitarität der klassischen S-Matrix (uniforme Airynäherung bzw. Integraldarstellung) für einige Streuwinkel Θ mit verschiedenen Amplitudenfaktoren im leichten System $^{20}Ne+^{152}Sm, E_{lab}=70$ MeV.
Airy(W): $\sin\tilde{q}_1$ in (I.22),
Airy(R): $\sin q_1$ statt $\sin\tilde{q}_1$ in (I.22),
Airy: $2/\pi$ statt $\sin\tilde{q}_1$ in (I.22),
ID: Die Integraldarstellung der vollen planaren Näherung (5.19).

Coulomb-streuwinkel (Grad)	Airy(W)	Airy(R)	ID	ID(su)
20	1.172	0.986	0.997	1.000
40	0.937	1.128	0.989	1.000
60	1.000	0.988	0.969	1.000
80	1.012	1.006	0.923	1.000
100	0.991	1.002	0.853	1.000
120	0.995	0.995	0.803	1.000
140	1.008	1.018	0.826	0.999
160	0.993	0.990	0.924	0.999
180	0.999	0.983	0.987	0.999

Tabelle 7 : Siehe Tabelle 6 , aber für das schwere System $^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=$ 371 MeV.
ID(su): Die Integraldarstellung der vollen planaren Näherung (5.19) im "sudden" Grenzfall (5.23).

70 MeV im gesamten Winkelbereich gut, hat aber im schweren System $^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=371$ MeV bei mittleren Winkeln eine sehr deutliche Abweichung. Auch bei anderen schweren Systemen (z.B. $^{84}Kr+^{238}U, E_{lab}=385$ MeV, [81]) zeigen sich in der Integraldarstellung die gleichen Abweichungen nach unten.

Der Grund für die unterschiedliche Erfüllung der Unitarität durch die uniforme Airynäherung bzw. durch die Integraldarstellung ist wahrscheinlich in der Güte der semiklassischen Wellenfunktionen zu suchen, die in die Integraldarstellung eingehen. Es kommt zwar in keinem System zu Kaustikberührungen von klassischen Bahnen mit $(d\bar{q}/dq_1) \lesssim 0$ (siehe Abschnitt 3.3.2), die Ableitung erreicht aber doch als Funktion von q_1 wegen der starken Monopol-Quadrupolwechselwirkung untere Werte von 0.2 ($\Theta=130$). In diesen q_1-Bereichen, die bereits relativ nahe an der Kaustik liegen und in denen auch stationäre Bahnen vorkommen, ist die Approximation der quantenmechanischen Wellenfunktionen durch die semiklassischen Wellenfunktionen nicht mehr sehr gut. Daher wird es im allgemeinen in den Werten der Integrale (S-Matrixelemente) zu spürbaren Abweichungen von den quantenmechanischen Resultaten kommen.

Diese Begründung für die relativ schlechte Erfüllung der Unitarität im schweren System wird durch die Betrachtung der vollen planaren Näherung (5.19) im "sudden" Grenzfall (Anhang II) unterstützt. Im "sudden" Grenzfall der planaren Näherung gilt nämlich $\partial\bar{q}/\partial q_1 \equiv 1$, so daß es grundsätzlich nicht zu Kaustikberührungen klassischer Bahnen kommen kann. Die Ergebnisse in Tabelle 7 zeigen nun, daß vermutlich deshalb die Integraldarstellung (5.19) im "sudden" Grenzfall auch für schwere Systeme die Unitaritätsbedingung sehr gut erfüllt.

5.4.4. Die Güte von uniformer Airynäherung und Integraldarstellung

Die Güte beider Darstellungen für die volle planare Näherung [(5.19) und (I.22)] wird nun am Beispiel des leichten Systems $^{20}Ne+^{152}Sm, E_{lab}=70$ MeV für die Winkelverteilung des 0^+-Zustandes (Abbildung 21) und am Beispiel des schweren Systems $^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=371$ MeV für die Winkelverteilungen des 4^+- und des 16^+-Zustandes (Abbildung 22) diskutiert. Die Auswahl der Zustände ist representativ für die anderen Spins. Verglichen wird jeweils mit quantenmechanischen Rechnungen im Formalismus der gekoppelten Kanäle [46] bzw. mit deBoer-Winther Rechnungen. Alle Rechnungen sind mit der Quantisierung $O \rightarrow N+1/2$ durchgeführt worden.

Die uniforme Airynäherung

Für das leichte System (Abb.21) liegt die Airynäherung für Streuwinkel $\Theta > 40$ sehr nahe an den quantenmechanischen Resultaten. Bei kleineren Winkeln (fast-elastischer Stoß) gibt es wachsende Abweichungen (siehe Anhang I). Die Winkelverteilung im schweren System (Abb.22) zeigt für den 4^+-Zustand über den gesamten Winkelbereich eine qualitativ gleichbleibende Übereinstimmung bzw. Abweichung von der deBoer-Winther Rechnung. Ähnliches findet man auch für die Anregung der Zustände 0^+ und 2^+ bis hin zu sehr kleinen Winkeln. Ins Auge fällt eine Art "Phasendifferenz" zwischen den Ergebnissen von uniformer Airynäherung und deBoer-Winther Rechnung, während die Amplitude der Winkelverteilung sehr ähnlich ist. Auch die Anregung von sehr hohen Spins, hier ist stellvertretend der Spin $J_2=16$ gezeigt (Abb.22), wird noch qualitativ richtig beschrieben.

Die Integraldarstellung

Für das leichte System (Abb.21) zeigt die Integraldarstellung für alle Winkel recht gute Ergebnisse. Die Konvergenz der Anregungswahrscheinlichkeit bei Vorwärtsstreuung gegen

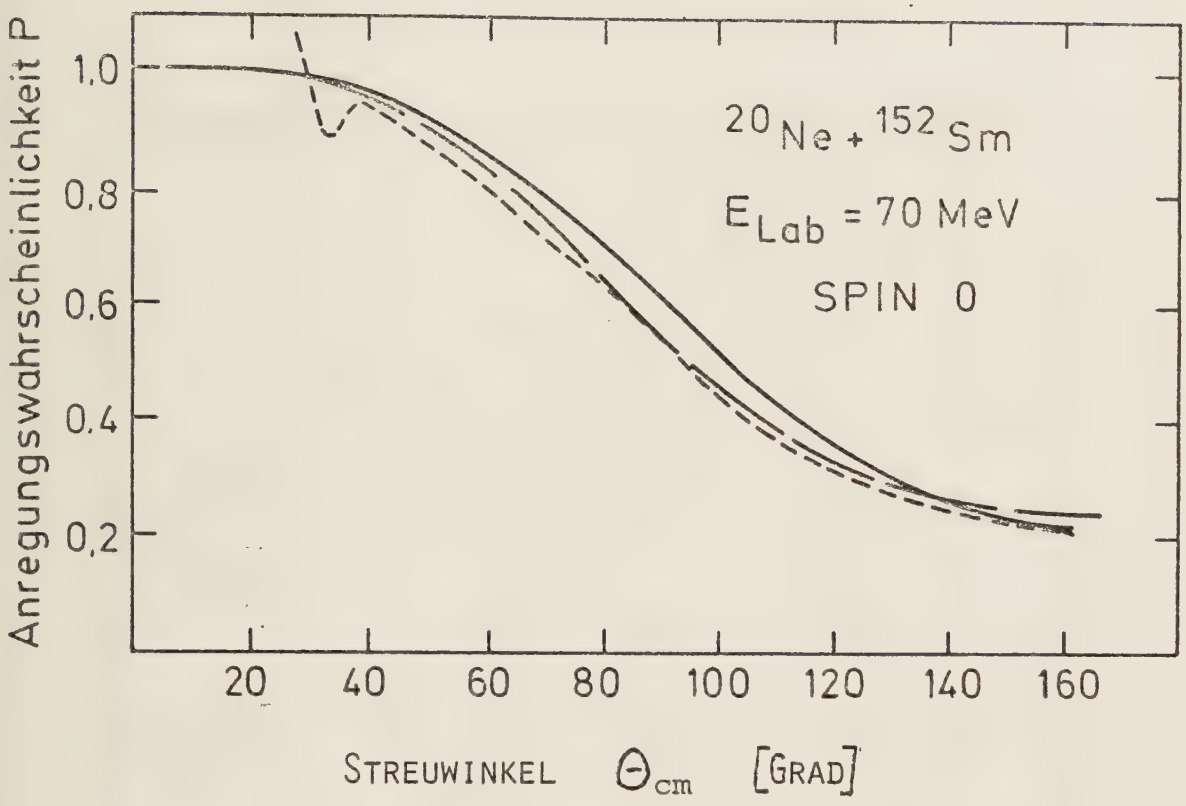

Abbildung 21 : Vergleich von Winkelverteilungen der Anregungswahrscheinlichkeit für den elastischen Kanal des leichten Systems $^{20}Ne+^{152}Sm, E_{lab}=70$ MeV. Die Winkelverteilungen sind mit der uniformen Airynäherung (I.22) [---] und der Integraldarstellung (5.19) [——] der klassischen S-Matrix in der vollen planaren Näherung berechnet worden. Die quantenmechanische Rechnung [—— —— ——] stammt aus [46] .

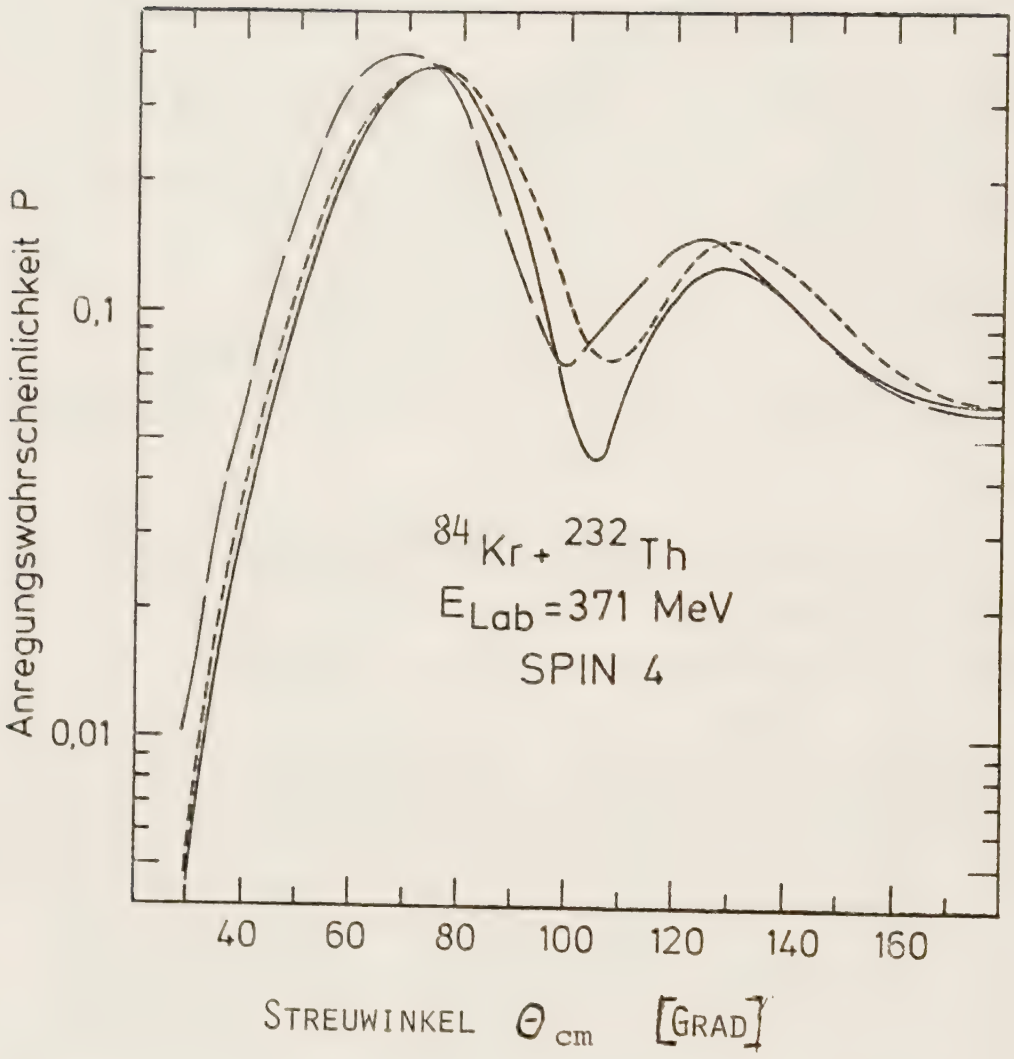

Abbildung 22a : Vergleich von Winkelverteilungen der Anregungswahrscheinlichkeit für den zweiten angeregten Zustand (4^+) von ^{232}Th in der Reaktion $^{84}Kr + ^{232}Th, E_{lab} = 371$ MeV. Die Winkelverteilungen sind mit der uniformen Airynäherung (I.22) [---] und der Integraldarstellung (5.19) [——] der klassischen S-Matrix in der vollen planaren Näherung berechnet worden.
Zum Vergleich dient eine deBoer-Winther Rechnung [— — —] [43a] .

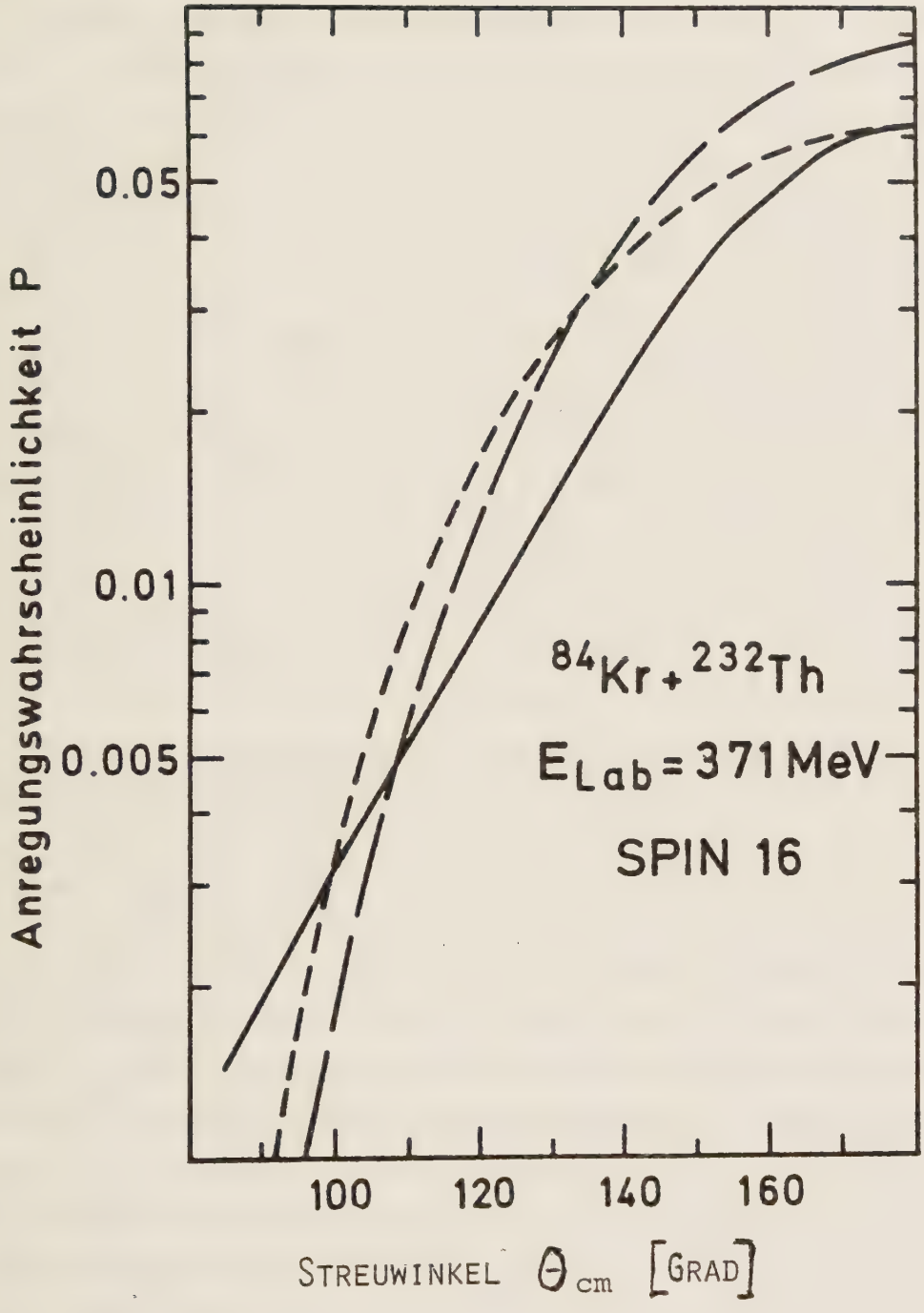

Abbildung 22b : Siehe Abbildung 22a, aber für den Rotationszustand mit J_2=16.

Eins wurde bereits oben erwähnt (5.21). Im mittleren Winkelbereich liegen die Resultate bis zu 10% über den quantenmechanischen Ergebnissen. Für das schwere System (Abb.22) ist ähnlich wie im Fall der uniformen Airynäherung bei der Winkelverteilung des 4^+-Zustandes eine Phasenverschiebung zu erkennen. Weiter sieht man, daß insbesondere das Minimum zu stark ausgeprägt ist. Die Winkelverteilungen der Zustände $2^+,6^+,8^+,10^+$ und 12^+ zeigen qualitativ das gleiche Verhalten; sie liegen stets etwas tiefer als die vergleichbaren Winkelverteilungen der uniformen Airynäherung. Einzig die Winkelverteilung für die Anregung des 0^+-Zustandes (siehe Abbildung 17) liegt ähnlich wie für das leichte System (Abb.21) zu hoch. Diese Unterschätzung in den Anregungswahrscheinlichkeiten kam bereits in Abschnitt 5.4.3 in der Abweichung der Unitarität der Integraldarstellung nach unten zum Ausdruck. Die Ergebnisse für die hohen Spins $14^+,16^+,\ldots$ werden bei den bereits sehr kleinen Anregungswahrscheinlichkeiten zunehmend schlechter (Abb.22) und weichen zu kleinen Streuwinkeln hin auch qualitativ schließlich sehr stark von den Resultaten der uniformen Airynäherung bzw. von den deBoer-Winther Rechnungen ab. Diese qualitative Differenz zwischen den Ergebnissen der Integraldarstellung und der uniformen Airynäherung läßt sich mit der Verletzung der Zeitumkehrinvarianz in der Integraldarstellung (Anfangswertdarstellung, [16]) erklären, die sich besonders bei klassisch stark verbotenen Übergängen bemerkbar macht (siehe Abschnitt 3.3.1).

Zusammenfassend können wir feststellen, daß sowohl die Integraldarstellung (5.19) als auch die uniforme Airynäherung (I.22) , die mit dem streuwinkelabhängigen Amplitudenfaktor (5.20) das volle planare Streuproblem näherungsweise beschreiben, im allgemeinen qualitativ ähnlich gute Ergebnisse geben. Die Übereinstimmung mit anderen Rechnungen (quantenmechanische Rechnung,deBoer-Winther Rechnung) ist in leichten Systemen besser als in schweren Systemen, die eine wesentlich stärkere Struktur in den Winkelvertei-

lungen haben.

Beide semiklassische Darstellungen haben je einen Bereich, in dem sie keine guten Ergebnisse liefern. Die uniforme Airynäherung versagt bei fast-elastischen Stößen (Vorwärtsstreuung), während die Integraldarstellung bei klassisch stark verbotenen Übergängen schlecht wird.

Im schweren System haben beide semiklassischen Darstellungen trotz der qualitativen Ähnlichkeit mit der deBoer-Winther Rechnung aber quantitativ noch recht große Abweichungen, die nicht befriedigend sind. In den Winkelverteilungen springen am deutlichsten Differenzen in der Lage der Minima und Maxima ins Auge ("Phasendifferenz"). Zur Untersuchung dieser Differenzen und zur genäherten Einbeziehung der nichtplanaren Bewegung in unser planares semiklassisches Modell (5.19) werden wir im nächsten Abschnitt den "sudden" Grenzfall untersuchen.

5.5. Die näherungsweise Berücksichtigung der nichtplanaren Bewegung

Die nach Einführung der vollen planaren Näherung (5.19) mit dem streuwinkelabhängigen Amplitudenfaktor (5.20) verbliebenden Unterschiede in den Anregungswahrscheinlichkeiten der Rotationszustände im schweren System $^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=371$ MeV zwischen unserem semiklassischen Modell und der deBoer-Winther Rechnung können zwei Ursachen haben:

A) Während bei deBoer-Winther die Rückkopplung der inneren Bewegung auf die Relativbewegung vernachlässigt wird, berücksichtigen die semiklassischen Darstellungen der klassischen S-Matrix diese Rückkopplung vollständig.

B) Unsere volle planare Näherung (Abschnitt 5.3) mit nur einem inneren Freiheitsgrad ist zu grob.

Eine Möglichkeit, die unter A) und B) genannten Ursachen genauer zu analysieren, bietet die Behandlung des "sudden" Grenzfalls. In diesem Fall fällt jede Rückkopplung der in-

neren Bewegung auf die Relativbewegung weg, so daß man entscheiden kann, inwieweit A) Ursache für die bestehenden Unterschiede ist. Die deBoer-Winther Rechnung wird im "sudden" Grenzfall identisch mit der exakten quantenmechanischen Beschreibung. Außerdem können im "suddden" Grenzfall fast alle Ausdrücke analytisch berechnet werden und ermöglichen damit eine genaue Analyse der Unterschiede zwischen der deBoer-Winther Rechnung und der Integraldarstellung (5.19) der klassischen S-Matrix, auf die wir uns im weiteren Verlauf der Arbeit beschränken wollen.

Im "sudden" Grenzfall werden in den Bewegungsgleichungen (5.5)-(5.8) die Parameter Λ und ξ Null gesetzt. Als Resultat (siehe Anhang II,(II.72)) erhält man für die Integraldarstellung (5.19) mit $\tilde{q}_1=\bar{q}$

$$S^{ID}_{J_2 O} = \frac{\sqrt{2J_2+1}}{2} \int_0^{\pi} d\bar{q}\, \sin\bar{q}\; P_{J_2}(\cos\bar{q})\; e^{i\bar{\delta}} \tag{5.23}$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{\delta} &= -2\bar{Q}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{r}}{\bar{r}^3\bar{p}}\; P_2(\cos q) \\ &= -\bar{Q}_2 \left[J_{20}(\Theta)\; P_2(\cos\bar{q}) - \frac{3}{2} J_{22}(\Theta)\; \sin^2\bar{q} \right]\end{aligned} \tag{5.24}$$

und

$$J_{20}(\Theta) = \sin^2\frac{\Theta}{2} + \frac{2-R_2}{2(\varepsilon^2-1)} \quad , \tag{5.25}$$

$$J_{22}(\Theta) = -\frac{1}{3}\sin^2\frac{\Theta}{2} + \frac{2-R_2}{2(\varepsilon^2-1)} \quad , \tag{5.26}$$

$$R_2 = (\pi-\Theta)\tan\frac{\Theta}{2} \quad . \tag{5.27}$$

Mit den S-Matrixelementen (5.23) werden gemäß (5.14) die Anregungswahrscheinlichkeiten P_{J_2} im "sudden" Grenzfall berechnet. Die Anregungswahrscheinlichkeit für die deBoer-Winther Rechnung läßt sich im "sudden" Grenzfall folgendermaßen schreiben [43c]

$$P_{J_2} = \sum_{M_2} \left| a_{J_2 \bar{M}_2} \right|^2 \tag{5.28}$$

mit

$$a_{J_2 \bar{M}_2} = \frac{}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\bar{q} \sin\bar{q} \; Y_{J_2 \bar{M}_2}(\bar{q}, \alpha) \exp\left[i \frac{8\pi}{5} \bar{Q}_2 \sum_{\mu=0,\pm 2} Y_{2\mu}(\tfrac{\pi}{2}, 0) \; J_{2\mu}(\Theta) \; Y_{2\mu}(\bar{q}, \alpha) \right]. \tag{5.29}$$

Hier ist $\bar{M}_2$ die Projektion des Spins J_2 auf die Achse der zum Streuwinkel Θ gehörenden Coulombhyperbel und $\bar{M}_2$ stimmt nicht mit der Helizität M_2 überein. Alle $a_{J_2 \bar{M}_2}$ mit $\bar{M}_2$=ungerade sind im "sudden" Grenzfall Null.

In Abbildung 23 sind die Anregungswahrscheinlichkeiten des "sudden" Grenzfalls der Quantenmechanik (5.28),(5.29) und der semiklassischen Integraldarstellung (5.14),(5.23) für J_2=4 aufgetragen. Deutlich wird damit, daß auch im "sudden" Grenzfall die Unterschiede zwischen beiden Rechnungen qualitativ gleich geblieben sind und deshalb nicht auf die unterschiedliche Behandlung der Rückkopplung von innerer Bewegung auf die Relativbewegung zurückzuführen sind. Vielmehr müssen die Unterschiede in der näherungsweisen Beschreibung der multiplen Coulombanregung mit nur einem inneren Freiheitsgrad (planare Bewegung) durch die Integraldarstellung begründet liegen.

Zur genauen Analyse der Unterschiede vergleichen wir die Ausdrücke $a_{J_2 0}$ (5.29) mit den Matrixelementen $S^{ID}_{J_2 0}$ (5.23). Hierbei muß man beachten, daß die $a_{J_2 0}$ in der $(J,\bar{M})$-

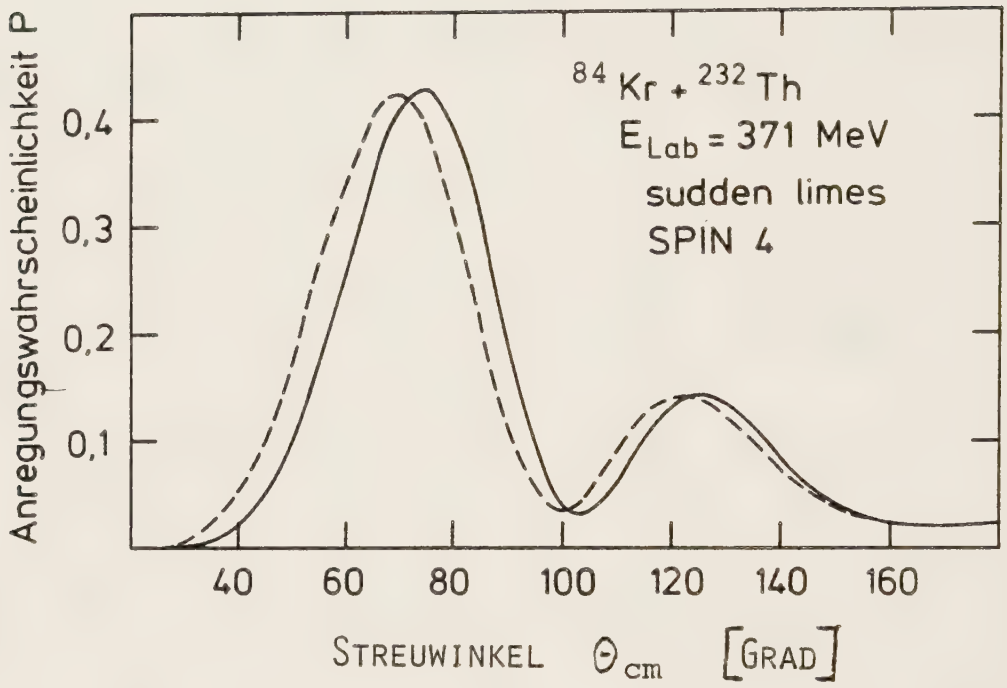

Abbildung 23 : Vergleich von Winkelverteilungen der Anregungswahrscheinlichkeit für den zweiten angeregten Zustand (4^+) von ^{232}Th in der Reaktion $^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=371$ MeV. Die Winkelverteilungen sind mit der Integraldarstellung (5.19) [——] der klassischen S-Matrix in der vollen planaren Näherung im "sudden" Grenzfall (5.23) und der quantenmechanischen Formulierung (5.29) [----] im "sudden" Grenzfall (deBoer-Winther) berechnet worden.

Darstellung ($\bar{M}$=Projektion von J auf die Achse der zum Coulombstreuwinkel Θ gehörenden Coulombhyperbel) und die $S^{ID}_{J_2O}$ in der (J,M)-Darstellung (M=Helizität,(5.1)) berechnet werden. In der planaren Näherung sind die S-Matrixelemente (5.23) allerdings in beiden Darstellungen identisch. Wir können daher den Vergleich der $S^{ID}_{J_2O}$ mit den a_{J_2O} in der (J,$\bar{M}$)-Darstellung vornehmen. Die weiter unten folgende näherungsweise Berücksichtigung der nichtplanaren Bewegung bei der Berechnung der semiklassischen S-Matrixelemente und die damit durchzuführende Berechnung der Anregungswahrscheinlichkeiten für den Rotator wird dann statt in der Helizitätsdarstellung ebenfalls in der (J,$\bar{M}$)-Darstellung durchgeführt werden.

Der Exponent im Integranden von (5.29) läßt sich nach kurzer Rechnung (Anhang II,(II.)) umschreiben auf

$$\delta = -2\bar{Q}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{r}}{\bar{r}^3\bar{p}} \; P_2(\cos\gamma) \;, \tag{5.30}$$

wo γ der Winkel zwischen der Verbindungsachse von Projektil und Target, der im "sudden" Grenzfall nur eine planare Komponente ($q-q_1-\pi/2+\Theta/2$) hat, und der räumlichen Orientierung der Symmetrieachse des Rotators ist, die durch die Winkel ($\bar{q}$, α) beschrieben wird. Es wird also die räumliche Orientierungsmöglichkeit des Rotators berücksichtigt. Der analoge Term $\bar{\delta}$ (5.24) berücksichtigt dagegen im Legendrepolynom $P_2(\cos q)$ bei der Definition des Differenzwinkels q nur eine planare Orientierung des Rotators (α=0). Dies ist der einzige Unterschied zwischen den a_{J_2O} (5.29) und den $S^{ID}_{J_2O}$ (5.23) . Es zeigt sich hieran sehr deutlich die Wirkung der planaren Näherung in unserem semiklassischen Modell.

Im Abschnitt 5.3 hatten wir den Ausdruck (5.19) unter der Annahme hergeleitet, daß die wahre Projektilbahn nur wenig von einer zum entsprechenden Bahndrehimpuls gehörenden Coulombhyperbel abweicht und daß Kreisringe von Rotatororientierungen um die Hyperbelachse zu gleichen Endspins

J führen. Der Ausdruck (5.19) sollte dann in guter Näherung den vollen Beitrag der planaren Bewegung zu den Anregungswahrscheinlichkeiten von Rotationszuständen liefern, wofür es notwendig war den räumlichen Charakter des Streuprozesses zu berücksichtigen.

Der Vergleich der $S^{ID}_{J_2O}$ (5.23) mit den a_{J_2O} (5.29) zeigt nun, daß der semiklassische Ausdruck sich durch Beschränkung des quantenmechanischen Ausdrucks auf $\alpha = 0$ (planare Bewegung) ergibt und daß deshalb im "sudden" Grenzfall der semiklassische Ausdruck exakt den vollen planaren Beitrag zu den Anregungswahrscheinlichkeiten liefert.

Wir führen nun in (5.29) die Integration über α aus und erhalten

$$a_{J_2\bar{M}_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2J_2+1)\,(J_2-\bar{M}_2)!}{(J_2+\bar{M}_2)!}} \int_0^{\pi} d\bar{q}\, \sin\bar{q}\, P_{J_2\bar{M}_2}(\cos\bar{q}) \cdot \\ \cdot (-i)^{\bar{M}_2/2}\, J_{\bar{M}_2/2}(y)\, \exp\left[-i\bar{Q}_2 J_{2O}(\Theta)\, P_2(\cos\bar{q})\right], \tag{5.31}$$

wobei

$$y = \frac{3}{2}\,\bar{Q}_2\, J_{22}(\Theta)\, \sin^2\bar{q} \tag{5.32}$$

und $J_{\bar{M}_2/2}(y)$ die regulären Besselfunktionen [82] sind. Der Vergleich von (5.23) und (5.31) zeigt dann, daß die $S^{ID}_{J_2O}$ sich von den a_{J_2O} formal nur durch die Ersetzung $J_0(y) \rightarrow \exp(iy)$ unterscheiden.

Die Unterschiede in den Anregungswahrscheinlichkeiten P_{J_2} zwischen der quantenmechanischen Rechnung (5.28), (5.29) und der semiklassischen Integraldarstellung (5.14), (5.23) haben somit zwei Ursachen. Einmal fehlt in der semiklassischen Rechnung die Summation über die $\bar{M}_2$-Zustände. Hierdurch wird die Anregungswahrscheinlichkeit verringert.

Zum anderen ist für $\bar{M}_2=0$ im Integranden der Integraldarstellung (5.23) die Berechnung der Phase $\bar{\delta}$ (5.24) auf die Wechselwirkung mit einem planar orientierten Rotator beschränkt; gleichwohl stimmt die Amplitude mit der quantenmechanischen Amplitude überein. Das führt im Integranden von (5.23) auf die Ersetzung $J_0(y) \rightarrow \exp(iy)$ und bedeutet eine Überschätzung der Anregungswahrscheinlichkeit für Zustände mit $\bar{M}_2=0$. Daraus folgt, daß für die Anregung von Zuständen mit $\bar{M}_2=0$ die planare und die nichtplanare Bewegung destruktiv interferieren. Die planare Bewegung allein führt zu größeren Anregungswahrscheinlichkeiten als planare und nichtplanare Bewegung zusammen.

Für den elastischen Kanal mit $J_2=0$ bleibt allein die Überschätzung der Anregungswahrscheinlichkeit übrig. Da im "sudden" Grenzfall die Integraldarstellung (5.23) für die volle planare Bewegung die Unitarität exakt erfüllt (siehe Tabelle 7), folgt aus der Überschätzung der Anregungswahrscheinlichkeit im elastischen Kanal eine Unterschätzung für die Summe aller Anregungswahrscheinlichkeiten der inelastischen Kanäle. Die Mitnahme der nichtplanaren Bewegung führt dann für den elastischen Kanal zu destruktiver Interferenz und für die Gesamtheit aller inelastischen Kanäle zu konstruktiver Interferenz (aber nicht unbedingt für jeden einzelnen inelastischen Kanal) in der Anregungswahrscheinlichkeit.

Wie unsere Rechnungen zeigen, bleibt auch in der vollen dynamischen planaren Näherung (5.19) die wegen der fehlenden Interferenz zwischen planarer und nichtplanarer Bewegung auftretende Überschätzung bzw. Unterschätzung der Anregungswahrscheinlichkeiten erhalten. In den Abbildungen 17 und 21 erkennt man, daß die semiklassische Anregungswahrscheinlichkeiten, die mit (5.19) berechnet worden sind, im elastischen Kanal stets über den Resultaten der quantenmechanischen Rechnung bzw. der deBoer-Winther Rechnung liegen. In Abbildung 22 liegen die semiklassischen Resultate für $J_2=4$ und $J_2=16$ dagegen im wesentlichen unter den Ergeb-

nissen der deBoer-Winther Rechnung.

Die obige Analyse zeigt, welche Modifizierungen in unserer klassischen S-Matrix (5.19) notwendig erscheinen. Bei der Ableitung der klassischen S-Matrix (Kapitel 3) wurde diese bei $t \rightarrow \infty$ als Skalarprodukt über die innere Bewegung der vollen einlaufenden semiklassischen Wellenfunktion und der freien Wellenfunktion des Endzustandes dargestellt (3.36). Da die einlaufende Wellenfunktion in der planaren Näherung keine ($\bar{M}_2 \neq 0$)-Komponenten besitzt, liefert nur das Skalarprodukt mit der ($\bar{M}_2 = 0$)-Komponente des freien Endzustandes (Rotator) einen Beitrag zur Anregung und alle S-Matrixelemente der Integraldarstellung mit $\bar{M}_2 \neq 0$ sind Null.

Wir korrigieren nun die einlaufende planare semiklassische Wellenfunktion mit einer (J_2+1)-komponentigen einlaufenden exakten quantenmechanischen Wellenfunktion des "sudden" Grenzfalls derart, daß die semiklassische Wellenfunktion im "sudden" Grenzfall mit der exakten Wellenfunktion übereinstimmt. Aus (5.19) leitet man für die volle dynamische planare semiklassische Wellenfunktion der inneren Bewegung den Ausdruck

$$\Psi^{(+)}(\bar{q}) = \sqrt{\frac{\sin\bar{q}}{2 \cdot \sin\tilde{q}_1}}\; e^{i\Delta} \tag{5.33}$$

ab, wobei die Phase Δ durch (5.17) gegeben ist. Im "sudden" Grenzfall wird daraus

$$\Psi^{(+)}_{su}(\bar{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[-i\,\bar{Q}_2\, J_{20}(\Theta)\, P_2(\cos\bar{q}) + i\gamma\right]. \tag{5.34}$$

Die quantenmechanische Wellenfunktion lautet im "sudden" Grenzfall

$$\psi^{(+)QM}_{su}(\bar{q},\alpha) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left[-i\bar{Q}_2 J_{20}(\Theta) P_2(\cos\bar{q}) + iy\cos 2\alpha\right] . \tag{5.35}$$

Wir konstruieren aus den obigen Wellenfunktionen nun eine semiklassische Wellenfunktion, die genau wie die quantenmechanische Wellenfunktion im "sudden" Grenzfall zu gegebenen J_2 für alle $\bar{M}_2$=gerade eine Komponente ungleich Null besitzt, insgesamt also eine (J_2+1)-komponentige Wellenfunktion für festes J_2 ist

$$\bar{\psi}^{(+)}(\bar{q},\alpha) = 2\,\psi^{(+)}(\bar{q})\cdot\psi^{(+)*}_{su}(\bar{q})\,\psi^{(+)QM}_{su}(\bar{q},\alpha) . \tag{5.36}$$

Die Wellenfunktion (5.36) wird statt (5.33) in die Definition der klassischen S-Matrix (5.19) eingesetzt. Die Erweiterung der bisher verwendeten Rotatoreigenfunktionen $P_{J_2}(\cos\bar{q})$ auf die Kugelfunktionen $Y_{J_2\bar{M}_2}(\bar{q},\alpha)$, $\bar{M}_2$=gerade, und die analytisch durchführbare Integration über α führt schließlich auf die semiklassische S-Matrix

$$S^{ID}_{J_2\bar{M}_2} = (-i)^{\bar{M}_2/2}\sqrt{\frac{(2J_2+1)(J_2-\bar{M}_2)!}{4\,(J_2+\bar{M}_2)!}}\int_0^{\pi} dq_1\, J_{\bar{M}_2/2}(y)\times$$
$$\times P_{J_2\bar{M}_2}(\cos\bar{q})\sqrt{\sin\tilde{q}_1\cdot\sin\bar{q}\,\frac{\partial\bar{q}}{\partial q_1}}\; e^{i(\Delta-y)} . \tag{5.37}$$

Gegenüber der alten Formulierung (5.19) der Integraldarstellung (volle planare Näherung) haben wir nun von Null verschiedene Matrixelemente für alle $\bar{M}_2$=gerade. Der Term

$$(-i)^{\bar{M}_2/2}\, J_{\bar{M}_2/2}(y)\, e^{-iy} \tag{5.38}$$

drückt die Korrektur auf die räumliche Orientierungsmöglichkeit des Rotators aus. Mit (5.37) werden wir die multiple Coulombanregung deformierter Kerne berechnen und die Ergebnisse im nächsten Abschnitt mit quantenmechanischen Rechnungen bzw. deBoer-Winther Rechnungen vergleichen.

Nach Konstruktion stimmen im "sudden" Grenzfall die semiklassischen S-Matrixelemente (5.37) und die quantenmechanischen S-Matrixelemente (5.31) überein. Im vollen dynamischen Stoß enthält die semiklassische Darstellung (5.37) die klassische Dynamik in einer Näherung: Die wichtigere planare Dynamik samt Rückkopplung der inneren Bewegung auf die Relativbewegung wird klassisch exakt behandelt, während die weniger wichtige nichtplanare Dynamik nur näherungsweise im "sudden" Grenzfall berücksichtigt wird.Wir haben dadurch die klassische Dynamik der multiplen Coulombanregung mit zwei inneren Freiheitsgraden neben der Relativbewegung derart genähert, daß beide inneren Freiheitsgrade unabhängig voneinander behandelt werden können, wobei die weniger wichtige genäherte nichtplanare Bewegung die unkomplizierte analytische Behandlung ermöglicht.

Damit ist die Beschreibung der multiplen Coulombanregung mit zwei inneren Freiheitsgraden durch die Integraldarstellung der klassischen S-Matrix auf die vollständige semiklassische Behandlung nur eines inneren Freiheitsgrades reduziert.

Es sollte noch darauf hingewiesen werden, daß diese Näherung nicht etwa die semiklassisch exakte Berechnung der Matrixelemente $S^{ID}_{J_2 O}$ bedeutet, da zu diesen auch die nichtplanare Bewegung beiträgt, wie umgekehrt auch die planare Bewegung zu den Matrixelementen $S^{ID}_{J_2 \bar{M}_2}$ mit $\bar{M}_2 \neq 0$ einen Beitrag liefert.

5.6. Die Ergebnisse mit der verbesserten klassischen S-Matrix

Wir vergleichen nun unsere mit der verbesserten Integraldarstellung (5.37) durchgeführten Rechnungen für das

leichte System $^{20}Ne+^{152}Sm, E_{lab}=70$ MeV mit quantenmechanischen Rechnungen im Formalismus der gekoppelten Kanäle [46, 77] und für das schwere System $^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=371$ MeV [73] mit deBoer-Winther Rechnungen.

In allen Rechnungen ist die Auswertung des Integrals (5.37) mit 181 Stützstellen in äquidistantem Abstand ($\Delta q_1=1^0$) durchgeführt worden. Bei nicht sehr starker klassischer Anregung, d.h. bei großen Partialwellen oder in leichten Systemen, ist die Integration bereits mit 91 Stützstellen so genau, daß der relative Fehler sich auf wenige Prozent beschränkt.

Wir betrachten zuerst das leichte System, dessen Winkelverteilungen für die Anregung der Rotationszustände in den Abbildungen 24 und 25 aufgetragen sind. Für den elastischen Kanal liegt die semiklassische Rechnung fast überall auf der quantenmechanischen Rechnung. Erst bei großen Streuwinkeln gibt es Abweichnungen. Die gleiche Situation findet man für den inelastischen Kanal (Abb.25), wobei der Abfall der quantenmechanischen Resultate in Vorwärtsrichtung mit einer zu geringen Anzahl mitgenommener Partialwellen zusammenhängen dürfte. In beiden Winkelverteilungen stimmt die semiklassische Rechnung besser mit dem Experiment [46,77] überein als die quantenmechanische Rechnung. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, daß in der quantenmechanischen Rechnung nur der 0^+- und der 2^+-Zustand berücksichtigt worden sind, während in der semiklassischen Rechnung alle Kanäle mitgenommen werden. In Rückwärtsrichtung zeigen der 4^+- und sogar der 6^+-Zustand eine merkbare Anregungswahrscheinlichkeit. Die Addition der Unterschiede für $J_2=0$ und $J_2=2$ zwischen beiden Rechnungen führt genau auf die mit unserem Modell berechneten Anregungswahrscheinlichkeiten der höheren Zustände. Die Ergebnisse von deBoer-Winther Rechnungen sind von den Resultaten der semiklasssischen Rechnung in den Abbildungen 24 und 25 nicht zu unterscheiden.

Ein Vergleich von Abbildung 24 mit Abbildung 21 zeigt

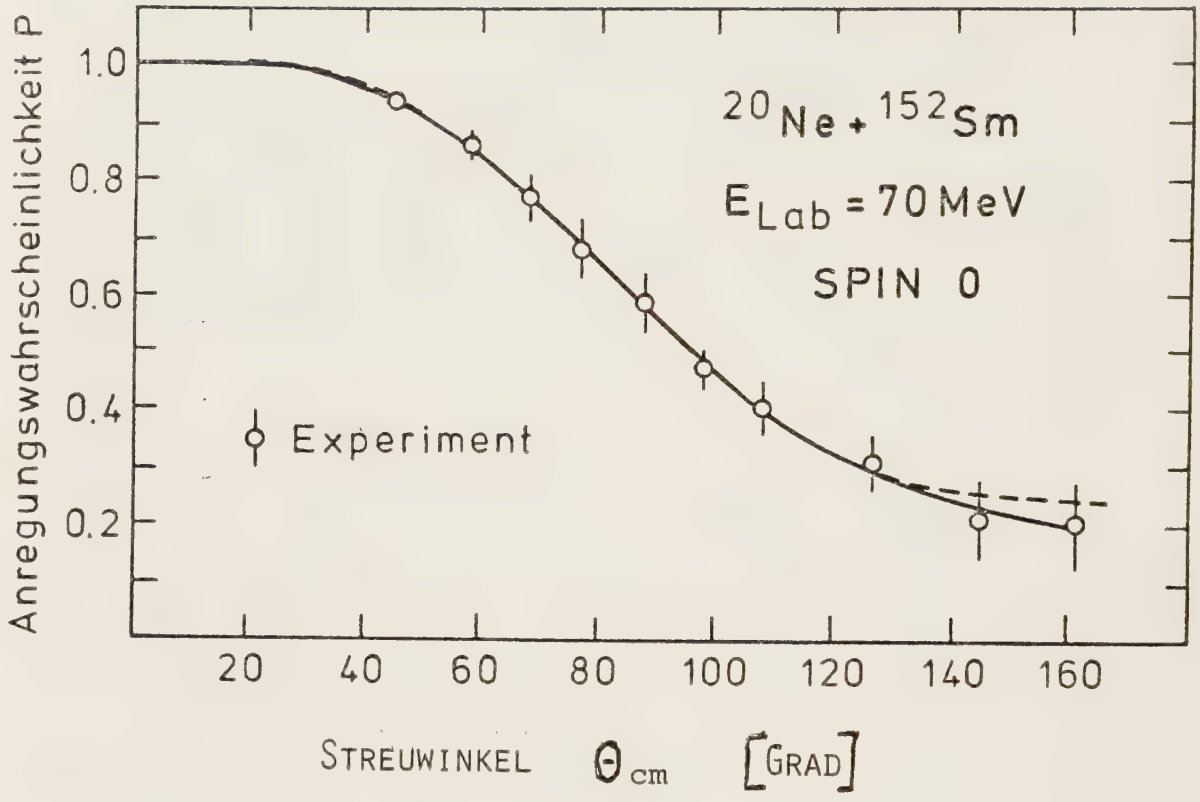

Abbildung 24 : Mit der verbesserten Integraldarstellung (5.37) [——] der klassischen S-Matrix berechnete Winkelverteilung der Anregungswahrscheinlichkeit für den elastischen Kanal des leichten Systems $^{20}Ne+^{152}Sm, E_{lab}$=70 MeV. Die Ergebnisse einer deBoer-Winther Rechnung liegen auf der semiklassischen Kurve. Die quantenmechanische Rechnung [----] und die experimentellen Daten stammen aus [46,77] .

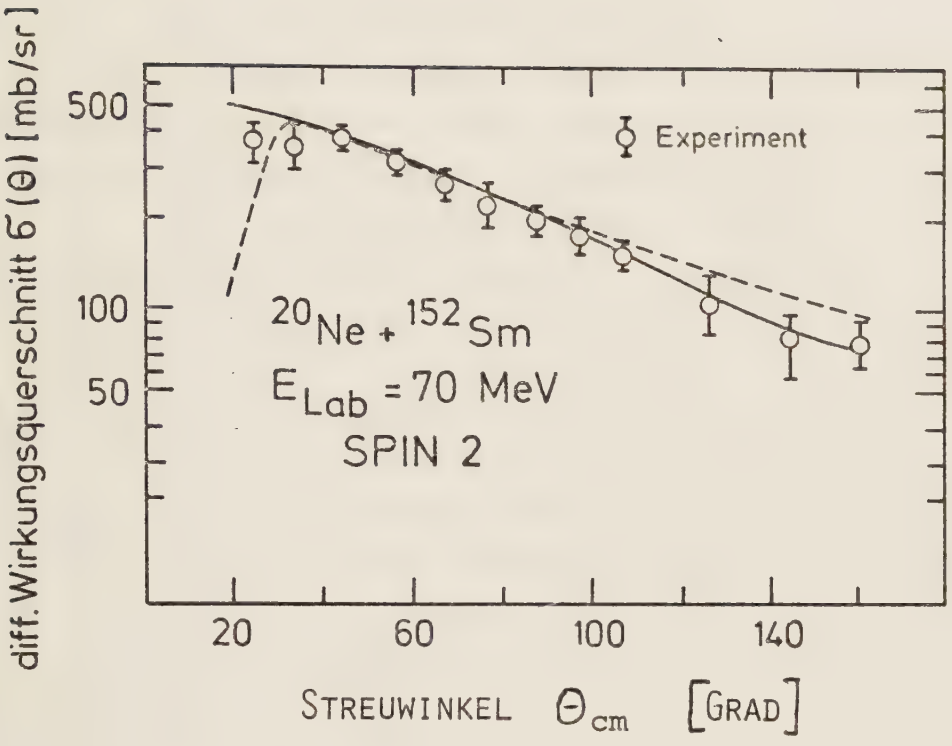

Abbildung 25 : Siehe Abb.24, aber der differentielle Wirkungsquerschnitt des ersten angeregten Zustandes (2^+) von ^{152}Sm.

deutlich die Verbesserung der Darstellung (5.37) gegenüber der vollen planaren Näherung (5.19) mit streuwinkelabhängigem Amplitudenfaktor (5.20).

Als Resultat kann man festhalten, daß unser semiklassisches Modell die multiple Coulombanregung deformierter Kerne in leichten Systemen quantitativ sehr gut beschreiben kann und gleichwertig mit quantenmechanischen Rechnungen bzw. deBoer-Winther Rechnungen ist.

Wir sehen uns nun die Ergebnisse bei einem schweren System an, dessen Winkelverteilungen der Anregungswahrscheinlichkeiten in den Abbildungen 26a und 26b dargestellt sind.Für den elastischen Kanal sind die semiklassischen Ergebnisse und die deBoer-Winther Ergebnisse fast ununterscheidbar, während ohne die in Abschnitt 5.5 eingeführte Modifizierung der semiklassischen Wellenfunktion, d.h. mit der S-Matrix (5.19), noch beträchtliche Unterschiede vorhanden gewesen sind (siehe Abbildung 17).

Zu den höheren Rotationszuständen hin nehmen die Unterschiede zwischen den semiklassischen Ergebnissen und den deBoer-Winther Ergebnissen allerdings trotz Modifizierung der semiklassischen Wellenfunktion kontinuierlich zu. Auffallend dabei ist, daß die semiklassischen Ergebnisse stets zu niedrig liegen. Die bei der vollen planaren Näherung (5.19) vorhandene Phasenverschiebung (siehe Abschnitt 5.4.4 und Abb.17/22) zwischen den Ergebnissen beider Rechnungen ist dagegen für alle Zustände vollständig verschwunden. Rechnungen für andere schwere Systeme zeigen qualitativ die gleichen Resultate.

In den weniger guten semiklassischen Ergebnissen für die inelastischen Zustände dürfte sich die Tatsache bemerkbar machen, daß wegen der starken Monopol-Quadrupol-Wechselwirkung die semiklassischen Wellenfunktionen zum Teil recht nahe an die Kaustik herankommen und dort an sich Uniformisierungen der Wellenfunktionen notwendig wären, ohne die die semiklassischen Wellenfunktionen an Güte verlieren (siehe auch Abschnitt 5.4.3).

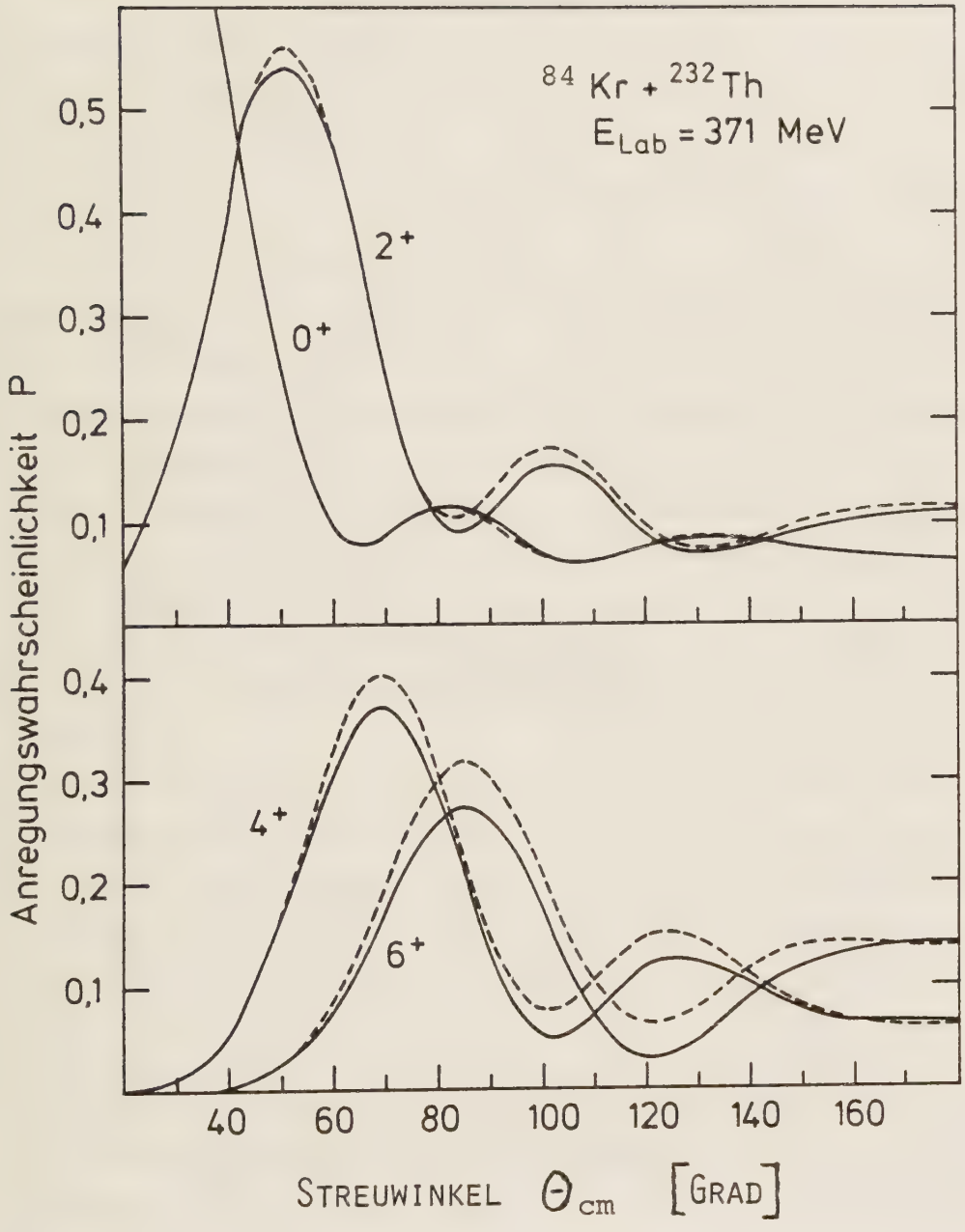

Abbildung 26a : Mit der verbesserten Integraldarstellung (5.37) [——] der klassischen S-Matrix berechnete Winkelverteilungen der Anregungswahrscheinlichkeiten der Rotationszustände von ^{232}Th in der Reaktion ^{84}Kr+^{232}Th, E_{lab}=371 MeV. Zum Vergleich dient eine deBoer-Winther Rechnung [----] [43a].

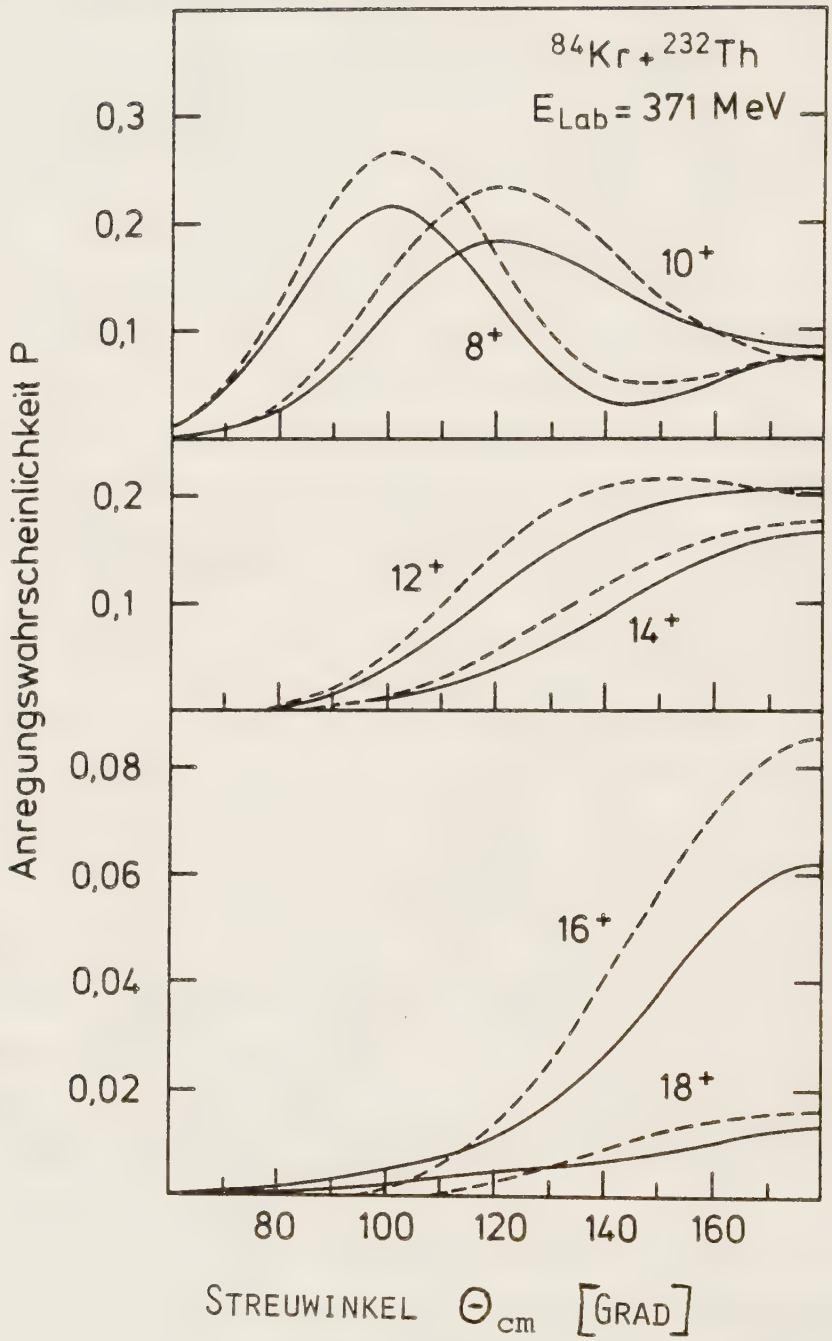

Abbildung 26b : Siehe Abb.26a .

Weiterhin lassen sich bei den stark verbotenen Übergängen (zB. J_2=18,Abb.26b) die Abweichnungen zu den kleinen Streuwinkeln Θ hin (völlig falscher Abfall der Anregungswahrscheinlichkeiten auf Null) wohl mit der Verletzung der Zeitumkehrinvarianz durch die Integraldarstellung der semiklassischen S-Matrix erklären (siehe Abschnitt 3.3.2).

In schweren Systemen kann deshalb unser semiklassisches Modell, anders als in leichten Systemen, die multiple Coulombanregung nicht mehr in quantitativer Übereinstimmung mit der deBoer-Winther Rechnung beschreiben. Allerdings wäre hier ein Vergleich mit (zur Zeit nicht möglichen) quantenmechanischen Rechnungen im Formalismus der gekoppelten Kanäle wünschenswert, da die deBoer-Winther Ergebnisse wegen der Vernachlässigung der Rückkopplung der inneren Bewegung auf die Relativbewegung auch von den wahren Anregungswahrscheinlichkeiten abweichen.

Insgesamt kann die Integraldarstellung (5.37) der klassischen S-Matrix mit der vollständigen semiklassischen Behandlung der planaren Bewegung und der näherungsweisen Berücksichtigung der nichtplanaren Bewegung die multiple Coulombanregung deformierter Kerne befriedigend (schwere Systeme) bis sehr gut (leichte Systeme) beschreiben, wobei die praktischen Rechnungen nicht aufwendig sind. Damit ist es erstmals möglich mit der klassischen S-Matrix Theorie die Winkelverteilungen multipler Anregungen zu beschreiben.

Im nächsten Kapitel werden wir den Einbau eines komplexen Kernpotentials in unser semiklassisches Modell diskutieren.

6. DIE SEMIKLASSISCHE BESCHREIBUNG VON KERN- UND COULOMBANREGUNGEN

Nachdem das in Kapitel 5 entwickelte Modell für die Beschreibung der multiplen Coulombanregung von Rotationszuständen durch eine Integraldarstellung der klassischen S-Matrix (KSM) recht gute Resultate liefert, werden wir in diesem Kapitel in das Modell neben der Coulombwechselwirkung die Kernwechselwirkung miteinbeziehen. Damit eröffnet sich die Möglichkeit, als Alternative zum quantenmechanischen Formalismus der gekoppelten Kanäle , gleichzeitig die multiple Coulomb- und Kernanregung mit der klassischen S-Matrix Theorie zu beschreiben. Die klassische S-Matrix Theorie ist in der Anwendung im Gegensatz zum quantenmechanischen Formalismus der gekoppelten Kanäle nicht in der Zahl der Kanäle beschränkt, die mitgenommen werden können und kann deshalb ohne weitere Schwierigkeiten auch auf die Beschreibung sehr schwerer Schwerionensysteme mit vielen angeregten Rotatorzuständen angewendet werden.

Zunächst werden wir in Abschnitt 6.1 die durch die Hinzunahme des reellen Anteils des Kernpotentials notwendigen Änderungen des semiklassischen Modells gegenüber der Formulierung in Kapitel 5 diskutieren. In Abschnitt 6.2 folgt die Einbeziehung des Imaginärteils des Kernpotentials , wobei wir uns darauf beschränken werden, diese nur in Störungstheorie zu berücksichtigen. Die vollständige Mitnahme des Imaginärteils scheitert daran, daß keine systematische Vorschrift dafür gefunden werden konnte, wie die in diesem Fall auftretenden Bahnen in der komplexen Ebene gewählt werden müssen. Schließlich werden in Abschnitt 6.3 die Resultate unseres Modells bei einem verhältnismäßig leichten Schwerionensystem mit einer Relativenergie in der Nähe der Coulombbarriere mit einer quantenmechanischen Rechnung und mit Experimenten verglichen.

6.1. Die Berücksichtigung des Realteils des Kernpotentials in dem semiklassischen Modell

Wir diskutieren in diesem Abschnitt die Einbeziehung des Realteils des Kernpotentials in das in Kapitel 5 entwikkelte semiklassische Modell für die multiple Coulombanregung von Rotationszuständen. Diese Erweiterung ist ohne Vergrößerung der Zahl der inneren Freiheitsgrade möglich. An der grundsätzlichen Formulierung der KSM (5.37) kann deshalb festgehalten werden. Allerdings macht das Kernpotential einige kleine Abänderungen der Theorie notwendig. Wir sehen uns zunächst die Änderungen an, die sich in Phase und Amplitude der klassischen S-Matrixelemente (5.37) auswirken.

Die Hamiltonfunktion H (5.2) wird um den Realteil des Kernpotentials erweitert

$$\overline{H} = H + V_N \tag{6.1}$$

mit

$$V_N = - \frac{V_o}{1 + \exp\left[\frac{r-R}{a}\right]} \quad , \tag{6.2}$$

wobei der Kernradius gemäß

$$R = R_o^P + R_o^T \left[1 + \beta_2 \, Y_{20}(q)\right] \tag{6.3}$$

bis zur Quadrupoldeformation des Targets entwickelt wird. Hier ist a die Diffuseness, R_o^P und R_o^T sind die Kernradien von Projektil (sphärisch) und Target, V_o ist die Potentialtiefe und β_2 ist die Quadrupoldeformation der Kernmassenverteilung des Targets. Für den Monopol-

Monopolwechselwirkungsterm des Coulombpotentials wird weiterhin $(Z_T Z_P e^2/r)$ angesetzt, obwohl in der Überlappregion beider Kerne diese Abhängigkeit nicht mehr streng gilt. Die Abweichungen, die durch ein gefaltetes Potential beschrieben werden können, sind bei Energien in der Umgebung der Coulombbarriere, wo wir unser Modell zunächst anwenden wollen, vernachlässigbar.

Zu den Bewegungsgleichungen (5.5) - (5.8) werden die durch das Kernpotential bedingten Terme

$$\frac{d\Delta p}{d\tilde{\tau}} = - \frac{\partial}{\partial r} V_N \qquad (6.4)$$

$$\frac{d\Delta r}{d\tilde{\tau}} = 0 \qquad (6.5)$$

$$\frac{d\Delta J}{d\tilde{\tau}} = - \frac{\partial}{\partial q} V_N \qquad (6.6)$$

$$\frac{d\Delta q}{d\tilde{\tau}} = 0 \qquad (6.7)$$

addiert. In den Stabilitätsgleichungen zur Berechnung der semiklassischen Amplituden der S-Matrix [Anhang III] gibt es entsprechende Änderungen.

Der Einfluß des Kernpotentials auf die klassischen Bahnen kann sehr stark mit der Anfangsorientierung q_1 des Rotators variieren. Dies macht sich unter anderem in einem entsprechenden Verlauf der Quantenzahlfunktion $J=J(q_1)$ bemerkbar (Abbildung 27). Diese Abhängigkeit des Endspins von der Anfangsorientierung des Rotators liefert unter Umständen zu einem gesuchtem J_2 mehr als zwei stationäre Bahnen. Wenngleich die Amplitude im Integranden der S-Matrix bei allen bis auf zwei der stationären Bahnen nach unseren Erfahrungen so klein ist (wegen der Wirkung des Imaginärteils des Kernpotentials,

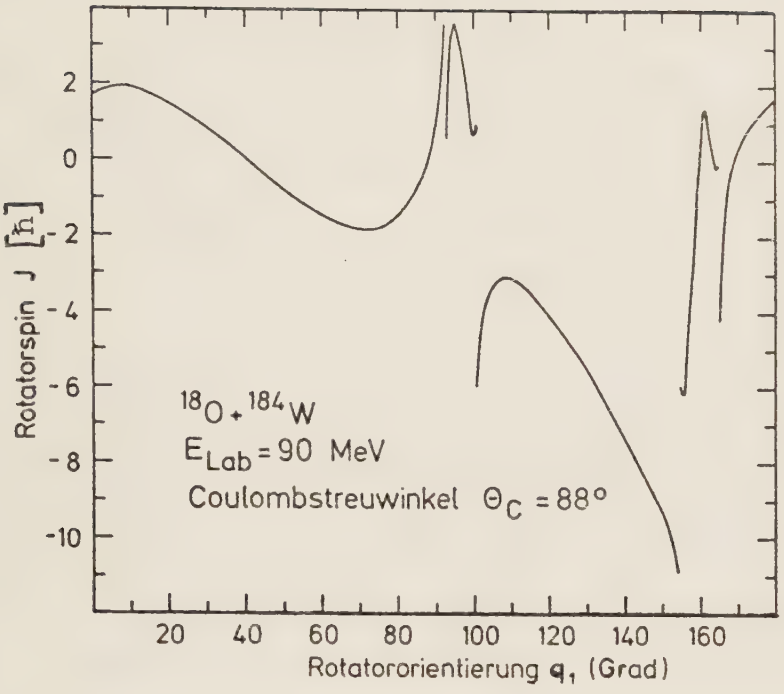

Abbildung 27 : Der Rotatorendspin J als Funktion der Rotatoranfangsorientierung q_1 unter dem Einfluß von Kern- und Coulombpotential im leichten System $^{18}O+^{184}W, E_{lab}=90$ MeV [Gesamtdrehimpuls I=43 ħ, Coulombstreuwinkel $\Theta_C=88°$]. Bei Berechnung von J in sehr kleinen Schritten Δq_1 sollte J als Funktion von q_1 eine stetige Kurve ergeben.

Abschnitt 6.2), daß deren Beiträge zur S-Matrix vernachlässigt werden können, lassen sich uniforme Näherungen nur mit erheblichem Mehraufwand konstruieren. Die bei der Beschreibung der reinen Coulombanregung benutzte uniforme Airynäherung (Anhang I) setzt die Existenz von nur zwei stationären Bahnen voraus und ist bei Mitnahme des Kernpotentials nicht mehr anwendbar. Wir verwenden deshalb keine uniforme Darstellung, sondern nur die Integraldarstellung (5.37) der S-Matrix, da in dieser ohne Schwierigkeiten auch über stark variierende Integranden integriert werden kann. Zwar treten bei Mitnahme eines Kernpotentials in der Integraldarstellung der KSM zahlreiche Kaustikberührungen der klassischen Bahnen auf, die zugehörigen Amplituden im Integranden der Integraldarstellung sind aber nach unseren Erfahrungen stets so klein, daß diese Bahnen zum Integral (5.37) nur einen vernachlässigbaren Beitrag liefern. Die Integraldarstellung der KSM bleibt daher anwendbar.

6.2 Die störungstheoretische Mitnahme des Imaginärteils des Kernpotentials

Die im Rahmen der klassischen S-Matrix Theorie vollständige Berücksichtigung des imaginären Anteils des Kernpotentials W_N führt auf komplexe Bahnen. Im allgemeinen nimmt dann entlang der komplexen Bahnen die Winkelvariable q (5.8) ebenfalls komplexe Werte an, wobei diese im asymptotischen Bereich $t \to \infty$ proportional zur Zeit anwachsen. Damit treten in den Wechselwirkungstermen der anderen Bewegungsgleichungen (5.5) und (5.7) über $\sin q$ oder $\cos q$ exponentiell mit der Zeit anwachsende Glieder auf, die durch die jeweiligen Potenzen von r ($r \sim t$) im Nenner nicht kompensiert werden können. Die Wechselwirkung geht deshalb asymptotisch mit der Zeit nicht gegen Null, sondern kann im Gegenteil in der komplexen Ebene gerade bei großen Zeiten periodisch sehr groß werden.

Die Probleme mit der asymptotisch anwachsenden Wechselwirkung lassen sich im Prinzip durch geeignete Wahl der komplexen Anfangsbedingungen für die Bewegungsgleichungen oder durch geeignete Deformation der klassischen Bahnen in der komplexen Ebene umgehen. Mit einem derartigen Vorgehen könnte außerdem gewährleistet werden, daß der Integrationsweg an den Singularitäten von Amplitude und Phase des Integranden nicht falsch vorbeiführt. Der Integrationsweg muß nämlich stets so gelegt werden, daß zwischen ihm und den stationären Punkten der Phase des Integranden, die den Hauptbeitrag zur Anregung der Rotationszustände liefern, keine Singularitäten liegen.

In mehreren Arbeiten aus der Molekülphysik [66-72] wird die Suche nach den Anfangsbedingungen für klassische Bahnen, die zu einer asymptotisch abfallenden Wechselwirkung führen, diskutiert. Es ist uns aber nicht gelungen, die Ergebnisse dieser Arbeiten, die nicht ohne weiteres verallgemeinert werden können, erfolgreich auf das kernphysikalische Problem zu übertragen.

Deshalb beschränken wir uns darauf, nur den Realteil des Kernpotentials in das in Kapitel 5 entwickelte Modell vollständig mit einzubeziehen, während die Wirkung des Imaginärteils des Kernpotentials nur als Dämpfung entlang der reell bleibenden klassischen Bahnen berücksichtigt wird. Dies entspricht einer störungstheoretischen Behandlung des Imaginärteils W_N des Kernpotentials und sollte zu guten Ergebnissen führen, sofern entlang der reellen Bahnen

$$W_N \ll E_{cm} - V_{eff} - V_Q \tag{6.8}$$

gilt. Hier sind E_{cm} die Relativenergie im Schwerpunktsystem , V_{eff} das effektive reelle Potantial (2.7) und V_Q das Monopol-Quadrupol Wechselwirkungspotential (letzter Summand in (5.2)).

Physikalisch heißt das, daß Kernanregungen vernachlässigt werden, die durch das imaginäre Potential bedingt sind. W_N wird entsprechend wie V_N (6.2),(6.3) gebildet, wobei aber im allgemeinen die Werte der Parameter (W_o, R_o^P, R_o^T, a, β_2) sich von denen für die Bildung von V_N unterscheiden. Die Dämpfung erhält man aus

$$D = + \frac{i}{\hbar} \int_1^f dt' \, W_N \quad . \tag{6.9}$$

D (6.9) wird zur Phase Δ (5.17) hinzuaddiert und für die S-Matrixelemente zur Berechnung der multiplen Kern- und Coulombanregung folgt

$$S^{ID}_{J_2\bar{M}_2} = (-i)^{\bar{M}_2/2} \sqrt{\frac{(2J_2+1)\,(J_2-\bar{M}_2)\,!}{4\;(J_2+\bar{M}_2)\,!}} \int_0^{\pi} dq_1 \; J_{\bar{M}\;/2}(\underline{y}) \times$$
$$\times P_{J_2\bar{M}_2}(\cos \bar{q}) \sqrt{\sin \tilde{q}_1 \;\; \sin \bar{q} \;\; \frac{\partial \bar{q}}{\partial q_1}} \;\; e^{i(\Delta - y)} \;\; e^{-D} \quad . \tag{6.10}$$

Auch hier wird $\tilde{q}_1$ (5.20) mit dem Coulombstreuwinkel (5.14) gebildet. Wie unsere Rechnungen zeigen, bewirkt die Dämpfung D, daß die Amplitude im Integranden von (6.10) für viele klassische Bahnen so klein wird, daß diese zur KSM (6.10) nur einen vernachlässigbaren Beitrag liefern. Das trifft insbesondere auf Bahnen zu, die die Kaustik berühren (siehe Abschnitt 6.1).

Die S-Matrixelemente $S^{ID}_{J_2\bar{M}_2}$ (6.10) werden in die Streuamplitude eingesetzt

$$f_{J_2\bar{M}_2}(\Omega) = \frac{1}{2ik} \sum_I \; (2I+1) \; d^I_{\bar{M}_2 0}(\Omega) \times$$
$$\times \left[e^{i\phi_c^I} \left[S^I_{J_2\bar{M}_2} \; e^{-i\phi_c^I} - 1 \right] + 1 - \delta_{J_2 0} \right] + f_{Cb}(\Omega) \tag{6.11}$$

und führen zum Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\partial \sigma_{J_2}}{\partial \Omega} = \sum_{\bar{M}_2} \left| f_{J_2 \bar{M}_2}(\Omega) \right|^2 . \qquad (6.12)$$

ϕ_c^I ist die elastische WKB-Coulombphase

$$\phi_c^I = \pi \cdot I - 2\eta \int_0^\infty r_c \, dp_c$$

$$= 2I \arcsin \frac{1}{\varepsilon} - 2\eta \ln(r_c p_c + r_c - 1)\Big|_\infty + 2\eta \ln \varepsilon . \qquad (6.13)$$

Der Logarithmusterm in (6.13) ist divergent, kann aber als I-unabhängiger Term weggelassen werden. $f_{Cb}(\Omega)$ ist die exakte Coulombstreuamplitude für Punktladungen

$$f_{Cb}(\Omega) = f_{Cb}(\theta, 0) = - \frac{\eta}{2 \sin^2(\Theta/2)} \times$$

$$\times \exp\left[i \left[2\sigma_0 - \eta \ln \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right] \right] \qquad (6.14)$$

mit

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{\varepsilon_0} + \eta \ln \varepsilon_0 \qquad (6.15)$$

Die in Abschnitt 4.2 verwendete Faktorisierung (4.19) des Wirkungsquerschnittes bleibt bei Einschluß des Kernpotentials nicht mehr gültig. Das Kernpotential kann die klassischen Bahnen wesentlich stärker in ihrem Verlauf beeinflussen als der Quadrupolwechselwirkungsterm des Coulombpotentials. Damit ist der über die freie Coulombphase hinausgehende Teil der Phase als Funktion des Gesamtdrehimpulses I ebenfalls stark veränderlich. Eine

etwaige Auswertung der in ein Integral überführten Partialwellensumme (6.11) mit der Näherung der stationären Phase kann daher nicht mehr allein mit der freien Coulombphase, sondern nur noch mit der gesamten Phase durchgeführt werden, was wesentlich komplizierter ist. Wir werden (ebenso wie in Kapitel 2) zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes deshalb die Summation über alle Partialwellen in (6.11) ausführen.

6.3. Vergleich des semiklassischen Modells mit anderen Rechnungen und Experiment

Wir haben als Beispiel mit der Integraldarstellung (6.10) der KSM die differentiellen Wirkungsquerschnitte für Rotationsanregungen von ^{184}W in der Reaktion $^{18}O+^{184}W$, E_{lab}=90 MeV berechnet. In den Abbildungen 28 und 29 vergleichen wir die semiklassischen Resultate mit Experimenten [62] , mit einer quantenmechanischen Rechnung mit gekoppelten Kanälen [62] sowie für den elastischen Kanal mit einer Rechnung, in der ein sogenanntes langreichweitiges Polarisationspotential [46] verwendet worden ist. Polarisationspotentiale sind kürzlich von Love et al [75] bzw. Baltz et al [46,76] eingeführt worden. Sie sind rein imaginäre Potentiale, die die Absorption in die angeregten kollektiven Zustände durch die Coulombwechselwirkung in Störungstheorie beschreiben und mit ihnen kann die elastische Streuung in Systemen ohne multiple Anregungen (zB. $^{18}O+^{184}W, E_{lab}$=90 MeV) in guter Übereinstimmung mit Experimenten [46,75] beschrieben werden.

In der quantenmechanischen Rechnung sind nur der 0^+- und der 2^+-Zustand berücksichtigt worden, was für das betrachtete System ausreicht.

Wir sehen uns zuerst die Ergebnisse für den elastischen Kanal an (Abb.28). Bis etwa θ=60° stimmen unsere Rechnungen mit der Polarisationsrechnung und dem Experiment gut überein. In diesem Bereich findet die Anregung

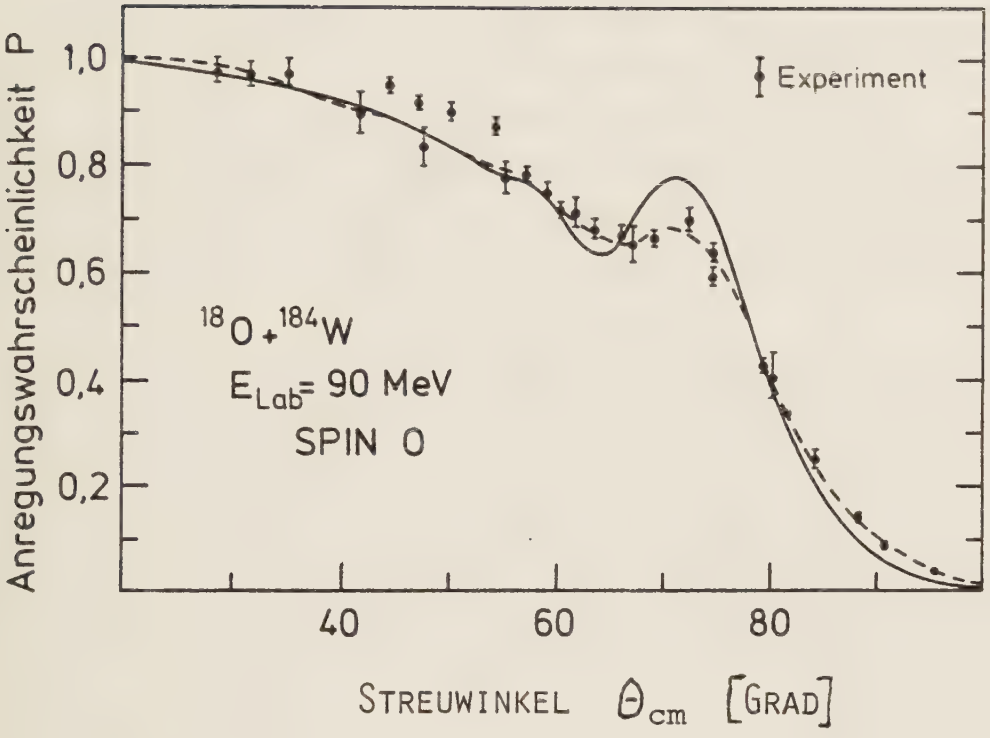

Abbildung 28 : Mit der verbesserten Integraldarstellung (6.10) [——] der klassischen S-Matrix berechnete Winkelverteilung der Anregungswahrscheinlichkeit für den elastischen Kanal des leichten Systems $^{18}O+^{184}W, E_{lab}$=90 MeV. Verglichen wird mit einer Polarisationsrechnung [46] [-----] . Die experimentellen Daten stammen aus [46,62] . Die Ergebnisse einer quantenmechanischen Rechnung im Formalismus der gekoppelten Kanäle [62] liegen sehr dicht bei den Ergebnissen der Polarisationsrechnung.

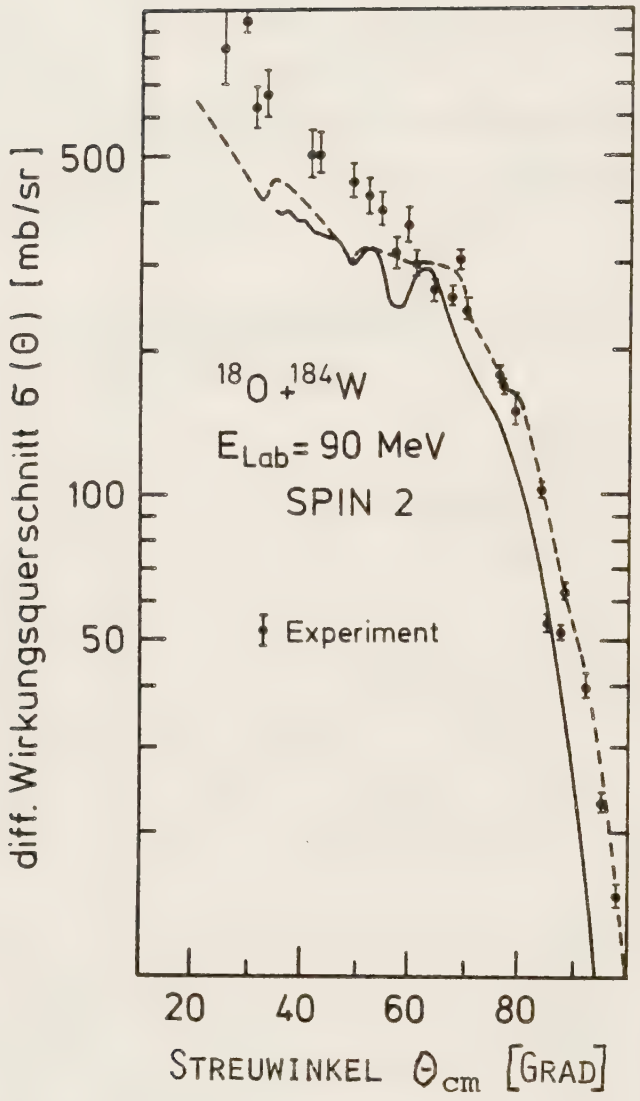

Abbildung 29 : Siehe Abb.28, aber der differentielle Wirkungsquerschnitt des ersten angeregten Zustandes (2^+) von ^{184}W. Hier wird mit einer quantenmechanischen Rechnung [62] [- - - - - -] verglichen.

vor allem durch das langreichweitige Coulombpotential statt, das für die starke Absenkung des elastischen Kanals gegenüber einem Fresnelverhalten sorgt. Etwa ab $\Theta = 60^{\circ}$ setzt die Kernwechselwirkung ein. Hier finden wir vor allem im Bereich des Fresnel-Peaks Abweichnungen unserer Resultate von Experiment und Polarisationsrechnung (die Ergebnisse von Polarisationsrechnung und quantenmechanischer Rechnung liegen dicht beieinander). Der Abfall der Anregungswahrscheinlichkeit zur Rückwärtsrichtung wird wieder in besserer Übereinstimmung beschrieben.

Im inelastischen Kanal (Abb.29) liegen bis $\Theta = 50^{\circ}$ sowohl unsere Rechnungen als auch die quantenmechanischen Rechnungen (wir verwenden die gleichen Parameter) unter den experimentellen Ergebnissen. Für größere Streuwinkel stimmen Experiment und quantenmechanische Rechnung gut überein, während unsere Ergebnisse zwar die Richtung des Abfalls richtig wiedergeben, aber durchweg ein wenig zu tief liegen.

Unsere Resultate zeigen insgesamt keine quantitative Übereinstimmung mit den quantenmechanischen Resultaten, wie bei Verwendung der gleichen Parameter in den Rechnungen zu fordern wäre, geben aber für die Analyse von Experimenten noch durchaus brauchbare Resultaten Die vorhandenen Unterschiede vor allem am Fresnel-Peak sind wahrscheinlich auf die störungstheoretische Behandlung des Imaginärteils des Kernpotentials zurückzuführen. Unsere Erfahrungen mit der rein elastischen Streuung schwerer Kerne (Kapitel 2) deuten nämlich darauf hin, daß die volle Mitnahme des Imaginärteils des Kernpotentials in unserem Modell zB. den Fresnel-Peak absenken würde.

Erst bei voller Einbeziehung des Imaginärteils des Kernpotentials in die Theorie durch Verwendung komplexer klassischer Bahnen sollte daher das semiklassische

Modell die (multiple) Rotationsanregung deformierter Kerne bei Energien im Bereich der Coulombbarriere quantitativer beschreiben können. Das vorliegende störungstheoretische Modell ist aber im Gegensatz zu quantenmechanischen Rechnungen mit gekoppelten Kanälen sofort auf schwerere Systeme anwendbar und sollte bei Systemen, in denen die Wirkung des imaginären Anteils am Kernpotential nicht groß ist, im Vergleich zum Experiment vernünftige Größenordnungsabschätzungen geben. Die Durchführung von Experimenten mit schweren Schwerionensystemen ist in naher Zukunft zu erwarten.

7. ZUSAMMENFASSENDE DISKUSSION

In der vorliegenden Arbeit sind Anwendungen von semiklassischen Verfahren auf elastische und inelastische Schwerionenreaktionen diskutiert worden.

In Kapitel 2 ist die semiklassische Theorie (WKB-Näherung), die zur Beschreibung der elastischen Streuung komplexe Bahnen verwendet, auf die Streuung sehr schwerer Schwerionensysteme erweitert worden. Es sind eine Anzahl gemessener Winkelverteilungen erfolgreich analysiert worden. Die Theorie besteht im wesentlichen darin, daß die Phase der elastischen S-Matrix für jeden Bahndrehimpuls als klassische Wirkung entlang geeignet zu wählender komplexer (wegen des optischen Kernpotentials) klassischer Bahnen berechnet wird. Es stellt sich heraus, daß die Wahl der Bahnen bei sehr schweren Schwerionensystemen besonders einfach ist und zwar kann man im Gegensatz zu leichten Systemen die Anfangsbedingungen für alle Bahnen bei großen Relativabständen stets auf der reellen Achse wählen. Außerdem ist anders als bei der Streuung mit leichten Teilchen (hauptsächlich wegen der starken Coulombabstoßung) für jeden Bahndrehimpuls nur ein Umkehrpunkt physikalisch relevant. Dieser liegt überdies noch weit weg von den Polen der verwendeten Woods-Saxon Potentiale, so daß die um diesen Umkehrpunkt führende komplexe Bahn nicht Gefahr läuft (im Gegensatz zu leichten Systemen) einen Pol des Potentials zu umrunden.

Die günstige Topologie der Umkehrpunkte in der komplexen Ebene bei sehr schweren Systemen macht eine Automatisierung eines Computerprogramms sehr leicht möglich. Es kann überdies ein allgemeines Kriterium dafür angegeben werden, für welche Schwerionensysteme (bei gegebener Einschußenergie und Potentialparametern) das vorliegende einfache semiklassische Verfahren (nur ein Umkehrpunkt ist wichtig, für alle komplexen Bahnen ist die Anfangsbedin-

gung Im r=0 bei großen Re r möglich) anwendbar ist.

Die semiklassischen Berechnungen von elastischen Winkelverteilungen zeigen über viele Größenordnungen eine quantitative Übereinstimmung mit entsprechenden quantenmechanischen Rechnungen und experimentellen Streudaten. Das semiklasssische Verfahren ist für beliebig viele Partialwellen (wir haben bis zu 3000 Partialwellen berücksichtigt) leicht anwendbar anders als der uns zur Verfügung stehende quantenmechanische Code (maximal 900 Partialwellen) und ist diesem besonders bei vielen mitzunehmenden Partialwellen an Geschwindigkeit überlegen.

Der Hauptteil der Arbeit hat sich damit beschäftigt, die in der Molekülphysik entwickelte klassische S-Matrix Theorie, die neben der Relativbewegung auch die inneren Freiheitsgrade der Reaktionspartner semiklassisch beschreibt, so zu modifizieren, daß inelastische Schwerionenreaktionen beschrieben werden können, bei denen multiple Anregungen auftreten (in den Anwendungen haben wir uns auf die Anregungen eines starren Rotators beschränkt).

In Kapitel 3 der Arbeit ist zu diesem Zweck eine Integraldarstellung der klassischen S-Matrix hergeleitet worden. Die Phase des Integranden der S-Matrix erhält man aus der Berechnung der klassischen Wirkungsfunktion entlang klassischer Bahnen, während die Amplitude über die Unitarität der S-Matrix festgelegt ist. Zunächst ist die S-Matrix als Integral über die Orts- und Winkelvariablen formuliert worden. Anschließend ist eine kanonische Transformation auf eine "Zeit"variable und sogenannte reduzierte Winkelvariable durchgeführt worden. Wenn man dann die semiklassisch konsistente Näherung macht, daß auch für die nichtstationären Bahnen die "Zeit"variable und die reduzierten Winkelvariablen für die ein- und auslaufenden Bahnen gleichgesetzt werden können, so liefert die Integration über die "Zeit"variable die energieerhaltende δ-Funk-

tion der S-Matrix und es bleibt nur noch die Integration über die reduzierten Winkelvariablen übrig. Die auf diese Weise gewonnene Integraldarstellung , bei der die Funktionaldeterminante für nichtkartesische Koordinaten im Gegensatz zu einer von Marcus hergeleiteten Integraldarstellung richtig behandelt worden ist, ist die Grundlage für die Anwendungen in den weiteren Kapiteln.

Die Integraldarstellung ist deshalb ausgewählt worden, weil in ihr über alle von einem gegebenen Grundzustand ausgehenden klassischen Bahnen integriert wird, was die für die uniformen Darstellungen notwendige und oft sehr mühsam durchzuführende Suche nach den stationären Bahnen vermeidet. Die üblichen uniformen Näherungen (Airynäherung, Besselnäherung) können aus der Integraldarstellung als Näherung der stationären Phase mit entsprechender Uniformisierung ohne weiteres hergeleitet werden.

Wegen der oben erwähnten Näherung für die nichtstationären Bahnen (Gleichsetzung von "Zeit"variablen und reduzierten Winkelvariablen für die ein- und auslaufenden Bahnen) verletzt die Integraldarstellung der klassischen S-Matrix im Gegensatz zu den uniformen Näherungen die Zeitumkehrinvarianz geringfügig, was sich aber erst bei klassisch sehr stark verbotenen Übergängen bemerkbar macht.

Ein weiteres Problem der Integraldarstellung, das für das Vermeiden der Näherung der stationären Phase in Kauf genommen werden muß, ist mit dem Auftreten von Kaustikberührungen klassischer Bahnen verknüpft. Die Amplitude des Integranden der Integraldarstellung ist im wesentlichen durch die Jacobideterminante der reduzierten Endwinkelvariablen nach den Anfangswinkelvariablen bestimmt. Wenn diese Jacobideterminante Nullstellen hat, so berühren klassische Bahnen die Kaustik (Einhüllende der klassischen Bahnen), was Uniformisierungen der verwendeten semiklassi-

schen Wellenfunktionen notwendig macht. Die Vorschrift zur Durchführung dieser Uniformisierungen stellt ein kompliziertes mathematisches Problem dar und ist in praktischen Rechnungen nicht anwendbar. Die Anwendung der Integraldarstellung der klassischen S-Matrix auf die Beschreibung der multiplen Coulombanregung, bei der neben der Relativbewegung zwei innere Freiheitsgrade auftreten und für deren Beschreibung daher uniforme Näherungen nur mit erheblichem Aufwand benutzt werden können,führt denn auch für schwere Systeme wegen der zahlreichen Kaustikberührungen (hohe Monopol-Quadrupolwechselwirkungsstärke) zu unbrauchbaren Resultaten.

Um die auftretende Kaustikproblematik zu untersuchen, haben wir in Kapitel 4 den "sudden" Grenzfall der Integraldarstellung für die Beschreibung der multiplen Coulombanregung betrachtet. Für diesen Grenzfall können alle Ausdrücke im Integranden der S-Matrix analytisch berechnet werden, wodurch es eventuell leichter möglich ist, einen Lösungsweg für die Kaustikproblematik zu finden. Außerdem fällt im "sudden" Grenzfall die deBoer-Winther Rechnung mit der quantenmechanischen Rechnung zusammen und kann daher als Vergleichsrechnung zu Rechnungen mit der Integraldarstellung herangezogen werden.

Wir haben für ein leichtes System das Auftreten von Kaustikberührungen insbesondere als Funktion der Monopol-Quadrupolwechselwirkungsstärke untersucht und haben gefunden, daß semiklassische und quantenmechanische Anregungswahrscheinlichkeiten sehr gut übereinstimmen, auch dann noch, wenn einige wenige klassische (auch stationäre) Bahnen bei höherer Wechselwirkungsstärke die Kaustik berühren. Die gute Übereinstimmung ist zum Teil auch darauf zurückzuführen, daß wir im Integranden der klassischen S-Matrix die semiklassischen Rotatorwellenfunktionen des freien Anfangs- bzw. Endzustandes durch die entsprechenden quantenmechanischen Eigenfunktionen ersetzt

haben.

Für ein schweres Schwerionensystem mit sehr großer Monopol-Quadrupolwechselwirkungsstärke, bei dem multiple Anregungen wirklich wichtig werden, haben wir die Winkelverteilungen der Anregungswahrscheinlichkeiten der Rotationszustände berechnet. Hier bricht wegen der zahlreichen Kaustikberührungen die Integraldarstellung der klassischen S-Matrix zusammen.

Es ist uns nicht gelungen, aus dem analytischen Modell des "sudden" Grenzfalls eine praktikable Vorschrift zur Behandlung der Kaustikberührungen von klassischen Bahnen in der Integraldarstellung herzuleiten. Erst die Lösung dieses sehr schwierigen Problems würde zu einer breiteren problemlosen Anwendbarkeit der klassischen S-Matrix Theorie auf Schwerionenreaktionen führen, bei denen neben der Relativbewegung mehr als ein innerer Freiheitsgrad semiklassisch behandelt werden muß.

Um dennoch im Rahmen der klassischen S-Matrix Theorie ein praktikables Verfahren etwa zur Beschreibung der multiplen Coulombanregung zu entwickeln, haben wir in Kapitel 5 eine Näherung des physikalischen Modells eingeführt. Diese besteht darin, statt zwei innerer Freiheitsgrade nur noch einen inneren Freiheitsgrad, nämlich die planare Bewegung , die den Hauptbeitrag zur Anregung der Rotationszustände liefert, vollständig semiklassisch zu behandeln, während der zweite innere Freiheitsgrad (die weniger wichtige nichtplanare Bewegung) nur näherungsweise berücksichtigt wird. Durch diese Rückführung auf ein bezüglich der inneren Anregung eindimensionales Problem sind die uniformen Näherungen wieder sehr einfach anwendbar und es hat sich herausgestellt, daß auch eine entsprechende Integraldarstellung ihre Gültigkeit behält, da es zu keinen Kaustikberührungen von klassischen Bahnen kommt.

Wir haben zuerst die rein planare Näherung der klas-

sischen S-Matrix untersucht, wobei der räumliche Charakter des Streuprozesses auch bei Beschränkung auf die planare Dynamik durch die Einführung einer vom Streuwinkel abhängigen Amplitude näherungsweise berücksichtigt worden ist. Bereits diese einfache Näherung führt zu einer guten Übereinstimmung unserer semiklassischen Ergebnisse (mit der Integraldarstellung und der uniformen Airynäherung) mit quantenmechanischen (bei leichten Systemen) bzw. deBoer-Winther Resultaten (bei schweren Systemen).

Eine weitere Verbesserung der semiklassischen Ergebnisse haben wir erreicht (nur für die Integraldarstellung), indem wir die weniger wichtige nichtplanare Bewegung in der Näherung des "sudden" Grenzfalls berücksichtigen, was zu analytisch angebbaren Korrekturen der planaren klassischen S-Matrix führt.

Wir haben dann mit diesem semiklassischen Modell die Winkelverteilungen der multiplen Anregungen von Rotationszuständen in Schwerionenreaktionen berechnet. Für leichte Systeme sind die semiklassischen von den deBoer-Winther Ergebnissen nicht zu unterscheiden und stimmen sehr gut mit den experimentellen Daten überein. Uns zur Verfügung stehende quantenmechanische Rechnungen zeigen dagegen geringe Abweichungen, da in ihnen zu wenig Kanäle mit einbezogen worden sind. Für schwere Systeme, für die quantenmechanische Rechnungen zur Zeit nicht möglich sind und für die uns auch keine experimentellen Daten zugänglich waren, weichen die semiklassischen von den deBoer-Winther Resultaten ab.

Diese Abweichungen hängen mit den unterschiedlichen Näherungen zusammen, die in beiden Theorien gemacht werden. Bei deBoer-Winther wird die Rückkopplung der inneren Bewegung auf die Relativbewegung gemittelt , im Rahmen dieser Näherung werden aber beide inneren Freiheitsgrade gleichwertig behandelt. In unserem semiklassischen Modell wird dagegen die Rückkopplung der planaren inne-

ren Bewegung auf die Relativbewegung klassisch exakt behandelt, was für schwere Systeme wichtig ist , aber die nichtplanare Bewegung nur in der Näherung des "sudden" Grenzfalls berücksichtigt.

Wünschenswert ist deshalb ein Vergleich der semiklassischen mit zur Zeit nicht möglichen quantenmechanischen Rechnungen und mit in naher Zukunft zu erwartenden experimentellen Daten. Außerdem sollten zusätzlich zur Integraldarstellung noch uniforme Darstellungen der klassischen S-Matrix (zB. die uniforme Airynäherung) für das semiklassische Modell untersucht werden. Zwei grundsätzliche Aspekte der Integraldarstellung wirken sich nämlich gegenüber den uniformen Darstellungen negativ auf die Ergebnisse aus. Einmal verletzt die Integraldarstellung im Gegensatz zu den uniformen Darstellungen die Zeitumkehrinvarianz geringfügig, so daß die letzteren bei klassisch stark verbotenen Anregungen bessere Ergebnisse liefern. Zum anderen kann erwartet werden, daß die uniformen Darstellungen auch bei klassisch erlaubten Anregungen noch etwas bessere Resultate liefern als die Integraldarstellung , da in der letzteren die verwendeten semiklassischen Wellenfunktionen zum Teil recht nahe an der Kaustik liegen und nicht, wie an sich notwendig, uniformisiert werden können. Dies macht sich in schweren Systemen unter anderem auch in der relativ deutlichen Verletzung der Unitarität durch die Integraldarstellung bemerkbar.

Hauptresultat von Kapitel 5 (und von der vorliegenden Arbeit) ist die Möglichkeit, erstmals im Rahmen der klassischen S-Matrix Theorie Winkelverteilungen für multiple Anregungen mit geringem Aufwand zu berechnen. Das semiklassische Verfahren ist auch auf sehr schwere Systeme ohne weiteres anwendbar und nicht beschränkt in der Anzahl der zu berücksichtigenden Anregungszustände des Rotators.

Im letzten Kapitel der Arbeit haben wir in das vorliegende semiklassische Modell für die multiple Anregung von

Rotatorzuständen neben der Coulombwechselwirkung noch die komplexe Kernwechselwirkung mit einbezogen. Während quantenmechanische Rechnungen auf die Mitnahme von sehr wenigen Rotationszuständen beschränkt sind, berücksichtigt das semiklassische Modell implizit alle Rotationszustände. Damit hat sich die Möglichkeit eröffnet, mit unserem semiklassischen Modell über den Anwendungsbereich existierender Theorien hinauszugehen (anders als bei der Beschreibung der multiplen Coulombanregung) und bisher nicht behandelbare kernphysikalische Prozesse (Coulomb- und Kernanregung schwerer deformierter Kerne) zu analysieren.

Wir haben uns vorerst allerdings darauf beschränkt, den Realteil des Kernpotentials vollständig in das semiklassische Modell mit einzubeziehen und den Imaginärteil des Kernpotentials nur störungstheoretisch zu berücksichtigen. Das führt zwar dazu, daß multiple Anregungen durch den Imaginärteil des Kernpotentials vernachlässigt werden, hat aber den Vorteil, daß die Schwierigkeiten mit den komplexen klassischen Bahnen (Umrundung von Potentialsingularitäten, Anwachsen der Wechselwirkung im asymptotischen Bereich bei den nichtstationären Bahnen) umgangen werden können.

Wegen des starken Einflusses des Kernpotentials auf den Verlauf der klassischen Bahnen ist die Anwendung einfacher uniformer Näherungen nicht mehr möglich und wir haben nur noch die Integraldarstellung der klassischen S-Matrix Theorie verwendet.

Wir haben die Ergebnisse der semiklassischen Rechnung mit quantenmechanischen Ergebnissen und experimentellen Daten für ein leichtes System (zwei angeregte Zustände) verglichen. Dabei hat sich gezeigt, daß im Winkelbereich, der maßgeblich vom Kernpotential beeinflußt wird, die semiklassischen zwar qualitativ aber nicht quantitativ mit den quantenmechanischen Resultaten bzw. den experimentel-

len Daten übereinstimmen. Die Unterschiede sind auf die störungstheoretische Behandlung des Imaginärteils des Kernpotentials im semiklassischen Modell zurückzuführen. Wünschenswert ist deshalb die vollständige Einbeziehung des Imaginärteils des Kernpotentials in das semiklassische Modell. Dafür ist es jedoch notwendig, die mit den komplexen klassischen Bahnen zusammenhängenden Probleme zu lösen, was uns bisher nicht gelungen ist.

Das vorliegende störungstheoretische Modell ist aber im Gegensatz zu quantenmechanischen Rechnungen mit gekoppelten Kanälen sofort auf schwere Systeme anwendbar, für die in naher Zukunft Experimente zu erwarten sind und sollte bei Systemen, in denen die Wirkung des Imaginärteils des Kernpotentials nicht groß ist, im Vergleich zum Experiment vernünftige Größenordnungsabschätzungen geben.

Abschließend stellen wir fest, daß semiklassische Verfahren (insbesondere die klassische S-Matrix Theorie) auf die Beschreibung von Schwerionenkernreaktionen dann erfolgreich und mit wenig Aufwand anwendbar sind, wenn entweder nur die radiale Relativbewegung (wie in der elastischen Streuung) oder zusätzlich höchstens noch ein innerer Freiheitsgrad behandelt werden müssen. Wenn man Probleme mit mehreren inneren Freiheitsgraden beschreiben will, so müssen Näherungen derart eingeführt werden, daß nur noch ein innerer Freiheitsgrad vollständig semiklassisch behandelt werden muß, während die übrigen Freiheitsgrade näherungsweise berücksichtigt werden. Damit müssen ursprünglich gehegte Hoffnungen auf eine breite, unkomplizierte Anwendbarkeit der multidimensionalen klassischen S-Matrix Theorie in der Schwerionenkernphysik stark reduziert werden.

Anhang I : Die uniforme Airynäherung der klassischen S-Matrix

In diesem Anhang soll die uniforme Airynäherung [15,24] aus der Integraldarstellung (5.19) der klassischen S-Matrix abgeleitet werden. Die uniforme Airynäherung dient in Kapitel 5 dem Vergleich mit der Integraldarstellung. Wir beschränken uns deshalb auf die Ableitung der uniformen Airynäherung für die Berechnung der Coulombanregung in der vollen planaren Näherung.

I.1. Die uniforme Airynäherung für klassisch erlaubte Übergänge

Wir gehen von der Integraldarstellung (5.19) aus, in der das Legendrepolynom durch seine semiklasssische Näherung

$$P_{J_2}(\cos\bar{q}) \approx \frac{2\cos\left[(J_2+1/2)\bar{q} - \pi/4\right]}{\sqrt{(2J_2+1)\pi\sin\bar{q}}} \tag{I.1}$$

ersetzt wird. Man erhält dann für (5.19)

$$S_{J_2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \sqrt{\sin\bar{q}_1}\sqrt{\frac{\partial\bar{q}}{\partial q_1}}\; e^{i\Delta(q_1)} \times \left\{\exp\left[-i\left[(J_2+\tfrac{1}{2})\bar{q} - \frac{\pi}{4}\right]\right] + \exp\left[i\left[(J_2+\tfrac{1}{2})\bar{q} - \frac{\pi}{4}\right]\right]\right\} dq_1 \tag{I.2}$$

$$= S(-J_2) + S(+J_2) \quad ,$$

wobei die Phase Δ durch (5.17) gegeben ist. Die Bedeutung aller Ausdrücke ist in Kapitel 5 erklärt. Die reduzierte Winkelvariable $\bar{q}$ ist durch (5.12) gegeben. Für deren Berechnung müssen die Bewegungsgleichungen (5.5)-(5.8) gelöst werden. Die Anregungswahrscheinlichkeit für

den Rotationszustand mit dem Spin J_2 erhält man bei Auswertung von (I.2) mit der uniformen Airynäherung durch die inkohärente Summation der entsprechenden Ausdrücke für $S(+J_2)$ und $S(-J_2)$

$$P_{J_2}(\Theta) = 2\,|S(+J_2)|^2 + 2\,|S(-J_2)|^2 \quad . \tag{I.3}$$

Die folgende Ableitung der uniformen Airynäherung wird nur für das Integral $S(-J_2)$ in (I.2) durchgeführt. Das zweite Integral $S(+J_2)$ muß ganz entsprechend mit dem umgekehrten Vorzeichen vor J_2 behandelt werden.

Die uniforme Airynäherung erhält man als eine Näherung der stationären Phase an (I.2). Letztere hat zur Voraussetzung, daß als Funktion von q_1 die Amplitude $g(q_1)$ des Integranden

$$g(q_1) = \sqrt{\sin \bar{q}_1}\,\sqrt{\frac{\partial \bar{q}}{\partial q_1}} \tag{I.4}$$

möglichst glatt ist und daß die Phase

$$F(q_1) = \Delta(q_1) - (J_2 + \tfrac{1}{2})\,\bar{q} + \frac{\pi}{4} \tag{I.5}$$

relativ zu (I.4) rasch veränderlich ist. Unter diesen Bedingungen tragen zum Integral $S(-J_2)$ (I.2) hauptsächlich die Punkte bei, in denen die Phase stationär wird

$$\frac{\partial F(q_1)}{\partial q_1} = 0 \tag{I.6}$$

Die einfache Aufsummation der Beiträge I_n der stationären Punkte

$$I_n \sim \int_0^{\pi} g(q_1)\,\exp\left[\frac{i}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial q_1^2}\cdot q_1^2\right] dq_1 \tag{I.7}$$

zur klassischen S-Matrix führt auf einen Ausdruck der Form (1.1). Dieser Ausdruck ist dann keine gute Näherung mehr, wenn zwei oder mehr stationäre Punkte nahe beieinander liegen (klassische Katastrophe, $\partial^2 F(q_1)/\partial q_1^2 \approx 0$). In diesem Fall muß man zu uniformen Näherungen, wie der uniformen Airynäherung, greifen.

Voraussetzung für die Anwendung der uniformen Airynäherung ist die Existenz von zwei (komplexen) stationären Punkten im Integrationsintervall von $q_1 = [0, \pi]$. Die beiden stationären Punkte können auch zusammenfallen (klassische Katastrophe). Die Phase F (I.5) kann dann exakt auf eine kubische Funktion mit ebenfalls höchstens zwei stationären Punkten abgebildet werden

$$F(q_1) = \frac{1}{3} y^3 - \xi y + A \quad . \tag{I.8}$$

Die neue Variable y ist eine monotone Funktion von q_1 ($\partial y/\partial q_1$ größer oder kleiner als Null), da sonst beide Seiten in (I.8) entgegen der Voraussetzung nicht die gleiche Anzahl von stationären Punkten haben würden. Die Konstanten ξ und A werden durch die eineindeutige Zuordnung der stationären Punkte beider Seiten von (I.8) bestimmt. Aus

$$\frac{\partial F(q_1)}{\partial q_1} = 0 = \frac{\partial y}{\partial q_1} \left[y^2 - \xi \right] \tag{I.9}$$

folgt für die Lage der stationären Punkte y_1 und y_2

$$y_1 = \sqrt{\xi} \quad , \qquad \text{(Minimum)} \tag{I.10}$$

$$y_2 = -\sqrt{\xi} \quad , \qquad \text{(Maximum)} \quad . \tag{I.11}$$

Einsetzen von y_1 und y_2 in (I.8) führt mit den stationären Punkten $q_1(1)$ und $q_1(2)$ auf

$$2\,A = F(q_1(1)) + F(q_1(2)) \tag{I.12}$$

und

$$\frac{4}{3}\,\xi^{3/2} = F(q_1(2)) - F(q_1(1)) \tag{I.13}$$

Die Reihenfolge in (I.13) gewährleistet, daß ξ positiv ist und daß damit die (y_1/y_2) reell sind. Das Integral $S(-J_2)$ in (I.2) lautet (immer noch exakt) in der Variablen y

$$S(-J_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^b g(q_1)\,\frac{\partial q_1}{\partial y}\,\exp\left[\,i\left[\frac{1}{3}\,y^3 - \xi y + A\right]\right]\,dy\ . \tag{I.14}$$

Nun wird für die Amplitude in (I.14) eine lineare Näherung durchgeführt, die eine analytische Integration von (I.14) ermöglicht

$$g(q_1)\,\frac{\partial q_1}{\partial y} = p_o + r_o\,y\ . \tag{I.15}$$

Dabei werden p_o und r_o so bestimmt, daß (I.15) an den stationären Punkten exakt ist und somit der Fehler für die Näherung von (I.14) minimal wird. Man erhält

$$r_o = \frac{1}{2}\,\xi^{-1/2}\left[\,g_1\,\frac{\partial q_1}{\partial y}\bigg|_1 - g_2\,\frac{\partial q_1}{\partial y}\bigg|_2\,\right]\ , \tag{I.16}$$

$$p_o = \frac{1}{2}\left[\,g_1\,\frac{\partial q_1}{\partial y}\bigg|_1 + g_2\,\frac{\partial q_1}{\partial y}\bigg|_2\,\right]\ . \tag{I.17}$$

Hier ist die Abkürzung $g_m = g(q_1(m)), m=1,2$ verwendet worden. Nochmaliges Differenzieren von (I.9) ergibt an den stationären Punkten

$$\left.\frac{\partial q_1}{\partial Y}\right|_1 = \sqrt{2\frac{\xi}{F_1''}} \quad , \tag{I.18}$$

$$\left.\frac{\partial q_1}{\partial Y}\right|_2 = \sqrt{-2\frac{\xi}{F_2''}} \quad . \tag{I.19}$$

Gestrichene Größen bedeuten Ableitungen nach q_1. Der spezielle Wert des Argumentes q_1 wird durch einen untenstehenden Index angegeben. Einsetzen von (I.18) und (I.19) in (I.16) und (I.17) führt auf

$$p_o = \frac{\xi^{1/4}}{\sqrt{2}}\left[\frac{g_1}{\sqrt{F_1''}} + \frac{g_2}{\sqrt{-F_2''}}\right] \quad , \tag{I.20}$$

$$r_o = \frac{\xi^{-1/4}}{\sqrt{2}}\left[\frac{g_1}{\sqrt{F_1''}} - \frac{g_2}{\sqrt{-F_2''}}\right] \quad . \tag{I.21}$$

Setzt man p_o (I.20) und r_o (I.21) in (I.14) ein und verschiebt die Integrationsgrenzen nach $\pm\infty$, erhält man $S(-J_2)$ in Termen der Airyfunktion Ai und deren Ableitung Ai'. Die Verschiebung der Integrationsgrenzen sollte den Wert des Integrals kaum ändern, da nach Voraussetzung die stationären Punkte den Wert des Integrals im wesentlichen bestimmen . $S(-J_2)$ lautet

$$S(-J_2) = e^{iA}\left[(p_1+p_2)\xi^{1/4}\ \mathrm{Ai}(-\xi) + i\,(p_1-p_2)\xi^{-1/4}\ \mathrm{Ai}'(-\xi)\right] \tag{I.22}$$

mit den Amplituden

$$p_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2\,F_1''}} \qquad g_1 = \left|\frac{\pi \sin \tilde{q}_1(1)}{2\,J'(q_1(1))}\right|^{1/2} \quad , \tag{I.23}$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{\pi}{-2F_2''}} \qquad g_2 = \left| \frac{\pi \sin \tilde{q}_1(2)}{2 J'(q_1(2))} \right|^{1/2} . \tag{I.24}$$

Hier sind die an den stationären Punkten aus den Gleichungen für F (I.5), Δ (5.17) und J (3.5) folgenden Relationen

$$F_m' = \left.\frac{\partial F}{\partial \bar{q}}\right|_m \bar{q}_m' = \left.\left[\left[J - J_2\right] \bar{q}'\right]\right|_m = 0 \quad , \qquad m=1,2 \tag{I.25}$$

$$F_m'' = \left.\left[\left(J - J_2\right) \bar{q}'' + J' \bar{q}'\right]\right|_m = \left. J' q' \right|_m \tag{I.26}$$

verwendet worden. Mit (I.22) werden in Kapitel 5 die Anregungswahrscheinlichkeiten für die Rotationszustände des starren Rotators berechnet.

I.2. Die uniforme Airynäherung für klassisch verbotene Übergänge

Mit (I.22) können grundsätzlich klassisch erlaubte und klassisch verbotene Übergänge beschrieben werden. Klassisch verbotene Übergänge sind dadurch gekennzeichnet, daß der Betrag von J_2 größer ist, als der Betrag des Maximums bzw. des Minimums der mit reellen Anfangswinkeln q_1 berechneten Quantenzahlfunktion $J(q_1)$. Bei klassisch verbotenen Übergängen müssen daher die Anfangswinkel q_1 der stationären Bahnen in der komplexen q_1-Ebene gesucht werden.

Um die umfangreiche Suche nach den komplexen stationären Bahnen (zweidimensionales Problem) zu umgehen, werden wir klassisch verbotene Übergänge näherungsweise durch die Entwicklung der Quantenzahlfunktion $J(q_1)$, der reduzierten Winkelvariablen $\bar{q}(q_1)$ und der Phase $F(q_1)$ in Taylorreihen möglichst niedriger Ordnung um die Extrema der Quantenzahlfunktion $J(q_1)$ beschreiben.

Am Extremum gilt bis zur zweiten Ordnung in der Taylorreihe

$$J(q_1) = J_{ex} + \frac{1}{2}\left[q_1 - q_1(ex)\right]^2 J''_{ex} \qquad (I.27)$$

mit

$$J'_{ex} = 0 \quad . \qquad (I.28)$$

Für die klassisch verbotenen Quantenzahlen $J(q_1)$ (q_1= komplex) gilt $|J| > |J_{ex}|$ und man hat daher

$$\frac{J - J_{ex}}{J''_{ex}} < 0 \quad . \qquad (I.29)$$

Mit (I.29) folgt aus (I.27) an den stationären Punkten ($J=J_2$)

$$q_1(m) - q_1(ex) = \pm i \sqrt{2(J_{ex}-J_2) / J''_{ex}} \quad , \; m=1,2 \; . \; (I.30)$$

Die $q_1(m)$ sind die genäherten komplexwertigen stationären Punkte in (I.22) für die klassisch verbotenen Übergänge. Leitet man (I.27) nach q_1 ab und setzt (I.30) ein, erhält man

$$J'_m = \pm i \sqrt{2\,(J_{ex} - J_2) \cdot J''_{ex}} \quad , \; m=1,2 \; . \; (I.31)$$

Setzt man in (I.23) und (I.24) in das Argument der Sinusfunktion die komplexen $q_1(m)$ (I.30) ein, so folgt mit (I.31) und wegen $|\sin \tilde{q}_1(1)| = |\sin \tilde{q}_1(2)|$ für die Amplituden p_1 und p_2 in (I.22)

$$p = p_1 = p_2 = \left| \frac{\pi \sin \tilde{q}_1(1)}{2\sqrt{2(J_{ex}-J_2)\cdot J''_{ex}}} \right|^{1/2} \quad . \qquad (I.32)$$

Nun muß in (I.22) noch das Argument ξ der Airyfunktion berechnet werden. Hierzu wird die Phase F (I.5) um das Maximum bzw. das Minimum von $J(q_1)$ in eine Taylorreihe bis zur dritten Ordnung entwickelt

$$F(q_1) = F_{ex} + \left[q_1-q_1(ex)\right] F'_{ex} + \frac{1}{2}\left[q_1-q_1(ex)\right]^2 F''_{ex} + \frac{1}{6}\left[q_1-q_1(ex)\right]^3 F'''_{ex} \quad . \tag{I.33}$$

Die Ableitungen der Phase F am Extremum erhält man aus der Definition der Phase. Nach Konstruktion gilt [siehe (I.5) und Kapitel 3]

$$F'(q_1) = \left[J(q_1)-J_2\right] \bar{q}'(q_1) \quad , \tag{I.34}$$

$$F''(q_1) = \left[J(q_1)-J_2\right] \bar{q}''(q_1) + J'(q_1)\, \bar{q}'(q_1) \quad , \tag{I.35}$$

$$F'''(q_1) = \left[J(q_1)-J_2\right] \bar{q}'''(q_1) + 2\, J'(q_1)\, \bar{q}''(q_1) + J''(q_1) \cdot \bar{q}'(q_1) \quad . \tag{I.36}$$

Wir beschränken uns in der Entwicklung von $\bar{q}(q_1)$ in eine Taylorreihe auf Terme bis zur zweiten Ordnung und erhalten mit $\bar{q}'''(q_1)=0$ und $J'_{ex}=0$ aus (I.34)-(I.36)

$$F'_{ex} = (J_{ex}-J_2)\, \bar{q}'_{ex} \quad , \tag{I.37}$$

$$F''_{ex} = (J_{ex}-J_2)\, \bar{q}''_{ex} \quad , \tag{I.38}$$

$$F'''_{ex} = J''_{ex} \cdot \bar{q}'_{ex} \quad . \tag{I.39}$$

Setzt man (I.30),(I.37)-(I.39) in (I.33) ein und beachtet

$$\left[q_1(1) - q_1(ex)\right]^2 = \left[q_1(2) - q_1(ex)\right]^2 , \qquad (I.40)$$

folgt für die Phasendifferenz zwischen den beiden stationären Punkten bei klassisch verbotenen Übergängen

$$F_2 - F_1 = -i\frac{4}{3}(J_{ex}-J_2)\,\bar{q}'_{ex}\,\sqrt{2(J_{ex}-J_2)/J''_{ex}} \quad . \qquad (I.41)$$

(I.41) wird in (I.13) eingesetzt und ergibt das Argument ξ der Airyfunktion. Das Argument ξ ist bei klassisch verbotenen Übergängen kleiner/gleich Null $\left[(-i)^{2/3}=-1\right]$, wodurch gewährleistet ist, daß auch die stationären Punkte y_1 (I.10) und y_2 (I.11) komplexe Werte annehmen.

(I.22) nimmt schließlich die Form

$$S(-J_2) = 2\, e^{iA}\, p\, \xi^{1/4}\, Ai(-\xi) \qquad (I.42)$$

mit

$$p\,\xi^{1/4} = \left| \pi \sin\tilde{q}_1(1)\; \bar{q}'^{1/3}_{ex}\; J''^{-2/3}_{ex}\; 2^{-4/3} \right|^{1/2} \qquad (I.43)$$

an. In Kapitel 5 werden mit der uniformen Airynäherung (I.22) bzw. (I.42) die Anregungswahrscheinlichkeiten von klassisch erlaubten bzw. klassisch verbotenen Übergängen berechnet.

I.3. Die uniforme Airynäherung bei fast-elastischen Stößen

Wir betrachten nun das Verhalten der uniformen Airynäherung bei fast-elastischen Stößen (verschwindende Wechselwirkung). In diesem Fall wird die Phase F (I.5) als Funktion von q_1 immer flacher. Die Voraussetzung für die Anwendung der

uniformen Airynäherung, nämlich eine im Verhältnis zur Amplitude rasch veränderliche Phase mit zwei (komplexen) stationären Punkten im Intervall $q_1 = [0, \pi]$, wird dann immer schlechter erfüllt. Dadurch hat die Verschiebung der Integrationsgrenzen von $[0, \pi]$ nach $[-\infty, +\infty]$ immer größeren Einfluß auf den Wert des Integrals und ist immer weniger gerechtfertigt. Im Grenzfall des vollständig-elastischen Stoßes wird die Phase eine Gerade ($\sim J_2 q_1$), die keine stationären Punkte mehr besitzt.

Wegen der von uns für die uniforme Airynäherung verwendeten Quantisierung $0 \rightarrow N+1/2$ sind bei fast-elastischen Stößen alle Anregungen (auch die des elastischen Kanals) klassisch verboten. Zur Untersuchnung des analytischen Verhaltens der uniformen Airynäherung bei fast-elastischen Stößen können wir daher für alle Kanäle die Ableitung für klassisch verbotene Übergänge in Abschnitt I.2 betrachten. Die dort gemachte Näherung zur Berechnung von Anregungswahrscheinlichkeiten klassisch verbotener Übergänge ist bei fast-elastischen Stößen eine sehr gute Näherung, da alle Größen schwach veränderliche Funktionen von q_1 sind.

Wegen

$$|\Delta J| = |J_2 - J_{ex}| > 0 \quad , \text{konstant} \tag{I.44}$$

und $\tilde{q}'_{ex} \approx 1$ folgt für die Phasendifferenz zwischen den stationären Punkten

$$F_2 - F_1 \sim J''^{-1/2}_{ex} \tag{I.45}$$

und somit

$$\xi \sim - J''^{-1/3}_{ex} \quad . \tag{I.46}$$

Für den Amplitudenfaktor (I.43) erhält man

$$p\,\xi^{1/4} \sim J_{ex}''^{-1/3} \quad . \tag{I.47}$$

Im fast-elastischen Stoß geht J_{ex}'' gegen Null, so daß die Amplitude (I.43) divergiert. Da aber die Airyfunktion $Ai(-\xi)$ für $\xi \to -\infty$ (I.46) exponentiell abfällt [82], kann die Singularität von (I.47) aufgefangen werden und die uniforme Airynäherung bleibt endlich. Allerdings werden die Anregungswahrscheinlichkeiten nicht mehr vernünftig beschrieben, wie man bei Anwendung der uniformen Airynäherung in Kapitel 5 erkennen kann. In den dort diskutierten Resultaten wird die uniforme Airynäherung für kleine Streuwinkel Θ schlecht.

Bei Verwendung einer Quantisierung $O \to N$ ist die Anregung des elastischen Kanals bei fast-elastischen Stößen klassisch erlaubt. Man kann auch für diesen klassisch erlaubten Übergang die Näherung von Abschnitt I.2 (Taylorreihenentwicklung) verwenden. Ein wesentlicher Unterschied zu klassisch verbotenen Übergängen bei fast-elastischen Stößen besteht aber darin, daß $\xi \to 0$ gilt (wegen $(J_2 - J_{ex}) \to 0$). Dadurch bleibt die Airyfunktion endlich ($Ai(0) \approx 0.36$), während die Amplitude (I.43) weiterhin divergiert. Deshalb divergiert die uniforme Airynäherung bei fast-elastischen Stößen für klassisch erlaubte Übergänge.

Man hat somit keinen Vorteil davon, bei fast-elastischen Stößen zur Beschreibung des elastischen Kanals durch die uniforme Airynäherung die Quantisierung $O \to N$ zu verwenden, bei der im Gegensatz zur Quantisierung $O \to N+1/2$ die Anregung des elastischen Kanals klassisch erlaubt ist und die daher unter einem physikalisch anschaulichen Gesichtspunkt vorzuziehen wäre.

Anhang II : Analytische Rechnungen im "sudden" Grenzfall

In diesem Anhang sollen die Einzelheiten der analytischen Rechnungen für den in Kapitel 4 und 5 diskutierten "sudden" Grenzfall dargestellt werden. Zuerst werden wir den "sudden" Grenzfall der zweidimensionalen Integraldarstellung der klassischen S-Matrix (Kapitel 4) behandeln um danach den Spezialfall des "sudden" Grenzfalls für die planare Näherung der Integraldarstellung (Kapitel 5) zu beschreiben. Alle Variablen sind dimensionslos. Der in Kapitel 4 und 5 verwendete Querstrich über r und p_r wird hier aber stets weggelassen.

II.1. Die Lösung der Bewegungsgleichnungen

Wir beginnen mit der Lösung der Bewegungsgleichungen (4.9)-(4.16). Aus (4.9) und (4.10) erhält man im "sudden" Grenzfall als Lösungen reine Coulombbahnen

$$p_r = p_r^c = \sqrt{1 - \frac{2}{r} - \frac{\varepsilon^2-1}{r^2}} \quad , \tag{II.1}$$

$$r = r_c \quad . \tag{II.2}$$

Damit folgt für ϑ (4.12)

$$\vartheta(r) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\varepsilon} - (\operatorname{sgn}\tau)\left[\arcsin\frac{r+\varepsilon^2-1}{r\,\varepsilon} - \frac{\pi}{2}\right] \tag{II.3}$$

und

$$\sin\vartheta(r) = \frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon^2 r}\left[r + \varepsilon^2 - 1 + p_r\, r\right] \quad , \tag{II.4}$$

$$\cos\vartheta(r) = \frac{1}{\varepsilon^2 r}\left[r + \varepsilon^2 - 1 - p_r\, r\,(\varepsilon^2-1)\right] \tag{II.5}$$

Die Winkel φ und β sind konstant. Zur Berechnung von $\bar{p}_\vartheta$ $\bar{p}_\beta$ und $\bar{p}_\varphi$

$$\bar{p}_\vartheta(r) = 3\, X_3(r) \left[\cos^2\beta - \sin^2\beta \cos^2\varphi\right] + 3\, X_4(r)\, \sin\beta \cos\beta \cos\varphi \quad , \tag{II.6}$$

$$\bar{p}_\beta(r) = 3\, X_3(r) \left[\sin^2\beta - \cos^2\beta\right] \cos\varphi + 3 \sin\beta \cos\beta \left[X_2(r) - \cos^2\varphi\, X_1(r)\right] \quad , \tag{II.7}$$

$$\bar{p}_\varphi(r) = 3\left[X_3(r)\, \sin\beta \cos\beta + \sin^2\beta \cos\varphi\, X_1(r)\right] \sin\varphi \tag{II.8}$$

werden die Integrale

$$X_1(r) = \int_\infty^r dr\, \frac{\sin^2\vartheta}{r^3\, p_r} = \frac{1}{\varepsilon^4(\varepsilon^2-1)} \left\{ -\frac{\varepsilon^4}{2} R_2(r) - \frac{(\varepsilon^2-1)^2}{r^2} - \frac{2(\varepsilon^2-1)^3}{3\, r^3} + (1+p_r)\left[\frac{2}{3}\varepsilon^4 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\right] + p_r\left[\frac{1}{r}\left[\frac{1}{6}\varepsilon^4 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\right] + \frac{1}{3\, r^2}\left[\varepsilon^6 - 4\varepsilon^4 + 5\varepsilon^2 - 2\right]\right]\right\} , \tag{II.9}$$

$$X_2(r) = \int_\infty^r dr\, \frac{\cos^2\vartheta}{r^3\, p_r} = \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left[p_r + 1 - R_2(r)\right] - X_1(r) , \tag{II.10}$$

$$X_3(r) = \int_\infty^r dr\, \frac{\sin\vartheta \cos\vartheta}{r^3\, p_r} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon^4} \left[\frac{1}{3}(p_r+1) + \frac{p_r}{3r} + \frac{p_r}{3\cdot r^2}\, 2(\varepsilon^2-1) + \frac{(\varepsilon^2-1)(\varepsilon^2-2)}{3\cdot r^3} + \frac{\varepsilon^2-2}{2\, r^2}\right] , \tag{II.11}$$

$$X_4(r) = X_1(r) - X_2(r) = 2\, X_1(r) - \frac{1}{\varepsilon^2-1}\left[p_r + 1 - R_2(r)\right] \tag{II.12}$$

mit

$$R_2(r) = \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{p_r\, r^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\, \vartheta(r) \quad , \tag{II.13}$$

$$R_3(3) = \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{p_r\, r^3} = \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left[p_r+1-R_2(r)\right] \quad , \tag{II.14}$$

$$R_4(r) = \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{p_r\, r^4} = \frac{1}{2(\varepsilon^2-1)^2} \times$$

$$\times \left[\frac{p_r}{r}\,(\varepsilon^2-1-3r) -3+R_2(r)\,(\varepsilon^2+2)\right] \quad , \tag{II.15}$$

$$R_5(r) = \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{p_r\, r^5} = \frac{1}{3(\varepsilon^2-1)^3}\left[\frac{p_r}{r^2}\left[\varepsilon^4-2\,\varepsilon^2+1-\frac{5}{2}r\,\varepsilon^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{5}{2}r+\frac{11}{2}\,r^2+2\,\varepsilon^2\cdot r^2\right]+\frac{11}{2}+2\,\varepsilon^2-R_2(r)\left[\frac{9}{2}\,\varepsilon^2+3\right]\right] \tag{II.16}$$

benötigt. Hat die Trajektorie den klassischen Umkehrpunkt $\bar{r}_T$ überquert, ist das Integral von ∞ bis r als Summe der Integrale von ∞ bis $\bar{r}_T$ und von $\bar{r}_T$ bis r zu verstehen. Mit den Lösungen für $\bar{p}_\beta$ (II.7) und $\bar{p}_\varphi$ (II.8) sind die Quantenzahlen J (4.28) und m (4.29) explizit bekannt.

II.2. Die Berechnung der Phase

Wir gehen nun zur Berechnung der Phase über. Wie bereits in Kapitel 4 erwähnt wurde, muß man in der Phase (4.23)

$$\delta\phi = -\eta \int_{\infty}^{\infty} r\, dp_r = \frac{4\bar{Q}_2}{\Lambda} \int_{\bar{r}_T}^{\infty} p_r\, dr - \frac{4\bar{Q}_2}{\Lambda}\, p_r \cdot r\Big|_{\infty} \tag{II.17}$$

in p_r Terme erster Ordnung in Λ berücksichtigen, da diese wegen des Vorfaktors $1/\Lambda$ auch im Limes $\Lambda \longrightarrow 0$ noch

endliche Beiträge zur Phase liefern. Wir beginnen mit dem Energiesatz in dimensionslosen Variablen

$$\frac{1}{2} = \frac{p_r^2}{2} + \frac{L^2}{2\eta^2 r^2} + \frac{\Lambda L \bar{p}_\vartheta}{\eta r^2} + \frac{\bar{p}_\vartheta^2 \Lambda^2}{2 r^2} + \frac{1}{r} + \frac{\Lambda}{r^3} P_2(\cos\gamma)$$
$$+ \frac{1}{4}\xi\Lambda\left[\bar{p}_\beta^2 + \frac{\bar{p}_\varphi^2}{\sin^2\beta}\right] + \frac{\Lambda^2}{2 r^3 \sin\vartheta}\bar{p}_\varphi^2 \quad . \tag{II.18}$$

Man erhält daraus für p_r bis zur ersten Ordnung in Λ

$$p_r = \sqrt{1 - \frac{2}{r} - \frac{\varepsilon^2 - 1}{r^2} - \Lambda G(r)} = p_r^c \sqrt{1 - \Lambda \frac{G(r)}{p_r^{c2}}} \tag{II.19}$$

mit

$$G(r) = \frac{2\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{r^2}\bar{p}_\vartheta + \frac{2}{r^3} P_2(\cos\gamma) \quad . \tag{II.20}$$

Entwickelt man die Wurzel in (II.19) nach Λ , folgt

$$p_r = p_r^c \left[1 - \frac{\Lambda G(r)}{2 p_r^{c2}} - \frac{\Lambda^2 G(r)^2}{8 p_r^{c4}} - \ldots\right] \quad . \tag{II.21}$$

Wir setzen nun p_r in (II.17) ein. Terme der Ordnung $O(\Lambda^2)$ liefern für $r \gg \bar{r}_T$ im Limes $\Lambda \longrightarrow 0$ keinen Beitrag. Etwas genauer muß man sich das Integral in der unmittelbaren Umgebung von $\bar{r}_T$ betrachten, da dort wegen $p_r \approx 0$

$$\frac{p_r^{c2}}{G(r)} \approx \Lambda \tag{II.22}$$

gilt und $\Lambda \cdot G(r)/p_r^{c2}$ im Limes $\Lambda \longrightarrow 0$ gegen Eins geht.

Aus (II.22) erhält man

$$p_r^c \sim \Lambda^{1/2} \qquad \text{(II.23)}$$

in der Umgebung von $\bar{r}_T$, denn G(r) ist dort endlich und fast konstant. Nun ist aber

$$\Delta r = \bar{r}_T - r_T \quad (r_T = \text{Umkehrpunkt von } r_c) \qquad \text{(II.24)}$$

in niedrigster Ordnung ebenfalls proportional zu Λ, denn es gilt $\Delta r = 0$ im Limes $\Lambda \longrightarrow 0$. Somit folgt aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\frac{1}{\Lambda}\int_{\bar{r}_T}^{\bar{r}_T+\Delta r} dr\; p_r^c \left[1 - \frac{\Lambda G(r)}{2\, p_r^{c2}} - \frac{1}{8}\left[\frac{\Lambda G(r)}{p_r^{c2}}\right]^2 - \ldots\right] \sim \Lambda^{1/2} \qquad \text{(II.25)}$$

und die Umgebung von $\bar{r}_T$ liefert im Limes $\Lambda \longrightarrow 0$ zum Integral in (II.17) keinen Beitrag. Weiter gilt

$$\frac{1}{\Lambda}\int_{r_T}^{\bar{r}_T} dr\; p_r^c \left[1 - \frac{\Lambda G(r)}{2\, p_r^{c2}} - \ldots\right] \sim \Lambda^{1/2}\,, \qquad \text{(II.26)}$$

so daß im Limes $\Lambda \longrightarrow 0$ die Verschiebung der unteren Grenze in (II.17) von $\bar{r}_T$ nach r_T auch keinen Beitrag zu (II.17) liefert.

Die Phase (II.17) nimmt nach Einsetzen von G(r) (II.20) mit $p_r\big|_\infty = p_r^c\big|_\infty$ schließlich die Form

$$\begin{aligned}\delta\phi = &-\frac{4\bar{Q}_2}{\Lambda}\int_{r_T}^{\infty} r\, dp_r^c - 4\bar{Q}_2 \int_{r_T}^{\infty} \frac{dr}{r^3 p_r^c} P_2(\cos\gamma) \\ &- 4\bar{Q}_2\sqrt{\varepsilon^2-1}\int_{r_T}^{\infty} \frac{dr}{r^2 p_r}\, \bar{P}_\vartheta\end{aligned} \qquad \text{(II.27)}$$

an. Das dritte Integral in (II.27) läßt sich mit (4.12) für $\Lambda = 0$ auf die Form

$$- 4\bar{Q}_2 \int_{r_T}^{\infty} \bar{p}_\vartheta \, d\vartheta$$

umschreiben . Die Phase (II.27) wird in (4.22) eingesetzt.

Die in (II.27) und (4.26) auftretende Phase

$$\delta = - 4\bar{Q}_2 \int_{r_T}^{\infty} \frac{dr}{r^3 \, p_r^c} \, P_2(\cos\gamma) \qquad \text{(II.28)}$$

läßt sich analytisch berechnen. Das Legendrepolynom P_2 kann man mit der Definition von γ (4.2) umschreiben,

$$P_2(\cos\gamma) = P_2(\cos\beta) - \tfrac{3}{2} K_1 \sin^2\vartheta + \tfrac{3}{2} K_2 \sin\vartheta\cos\vartheta \,, \qquad \text{(II.29)}$$

wobei

$$K_1 = \cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\varphi \qquad \text{(II.30)}$$

$$K_2 = 2 \sin\beta\cos\beta\cos\varphi \qquad \text{(II.31)}$$

sind. Mit (II.14),(II.9) und (II.11) erhält man dann

$$\delta = - 2\bar{Q}_2 \, P_2(\cos\beta) \, \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left[2 - R_2(\infty)\right] + 3\bar{Q}_2 \, K_1 \, X_1(\infty) - 3\bar{Q}_2 \, K_2 \, X_3(\infty) \,. \qquad \text{(II.32)}$$

II.3. Zum Vergleich mit der Alder-Winther Formulierung

Wir wollen den Alder-Winther Ausdruck [43c] für die Berechnung der Anregungswahrscheinlichkeiten eines starren Rotators im "sudden" Grenzfall mit der semiklassischen

Darstellung (4.40) vergleichen. Alle Formeln in eckigen Klammern beziehen sich auf [43c] .

Die semiklassische Integraldarstellung (4.40) ist in einer (J,m)-Darstellung der S-Matrix formuliert, während der Alder-Winther Ausdruck [5.9] in einer (J,$\bar{M}$)-Darstellung angegeben ist. m ist die Projektion des Spins J auf die Einfallsachse vom Projektil; $\bar{M}$ ist die Projektion von J auf die Achse der zum Streuwinkel Θ gehörenden Coulombhyperbel. Beide Formulierungen sind daher nicht direkt vergleichbar. Aus diesem Grund werden wir den Alder-Winther Ausdruck entlang der Herleitung in [43c] in einer (J,m)-Darstellung formulieren.

Die quantenmechanische Amplitude für den Übergang vom Grundzustand zum Zustand $|J_2 m_2\rangle$ schreibt sich im "sudden" Grenzfall [3.11]

$$a_{J_2 m_2} = \langle J_2 m_2 | \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} H(t)\, dt\right] | 0\ 0\rangle , \qquad (II.33)$$

wobei H(t) mit einem inneren Quadrupolmoment $Q_o^{(2)}$ sich schreibt [2.3], [5.4] als

$$H(t) = \frac{2\pi Z_P e^2 Q_o^{(2)}}{5} \sum_{\mu} \frac{1}{r^3} Y_{2\mu}(\vartheta,0)\, Y^*_{2\mu}(\beta,\varphi) . \qquad (II.34)$$

Die $Y_{2\mu}$ sind Kugelfunktionen. β und φ sind die Winkel für die räumliche Orientierung des Rotators , ϑ ist der Bahnwinkel des Projektils (siehe Abb. 8). Die Winkel $(\beta,\varphi,\vartheta)$ sind auf die Einfallsachse des Projektils bezogen, während die in [43c] auftretenden Winkel $(\beta',\varphi',\vartheta')$ auf die Achse der Coulombhyperbel bezogen sind. Mit

$$P_2(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{5} \sum_{\mu} Y_{2\mu}(\vartheta,0)\, Y^*_{2\mu}(\beta,\varphi) , \qquad (II.35)$$

wo γ (4.2) der Winkel zwischen der Projektil-Target Achse

und der Symmetrieachse des Rotators ist und der Einführung dimensionsloser Variabler (Kapitel 4) folgt für $a_{J_2 m_2}$

$$a_{J_2 m_2} = \langle J_2 m_2 | \exp\left[-2i\bar{Q}_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{P_2(\cos\gamma)}{r^3}\right] | 0\ 0 \rangle . \quad \text{(II.36)}$$

Der Ausdruck (II.36) ist von der Form her äquivalent zum Ausdruck $a_{J_2 \bar{M}_2}$, den Alder und Winther herleiten [5.7]. Ein Unterschied besteht nur in der Wahl der Quantisierungsachse, auf die der Spin projeziert wird.

Aus [5.8] folgt mit $K=I_i=M_i=0$

$$a_{J_2 m_2} = \sqrt{2\ J_2 + 1}\ \ A_{J_2 m_2} \quad , \quad \text{(II.37)}$$

$$A_{J_2 m_2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi(2J_2+1)}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\beta \sin\beta\ Y_{J_2 m_2}(\beta,\varphi) \exp\left[-2i\bar{Q}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\cos\gamma)}{r^3} d\tau\right] . \quad \text{(II.38)}$$

Die $a_{J_2 m_2}$ (II.37) sind identisch mit den in (4.44) verwendeten $S^{AW}_{J_2 m_2}$. Man erkennt in (II.38), daß die Phase des Integranden im Alder-Winther Ausdruck identisch mit der Phase δ (4.25) ist.

II.4. Die Berechnung der Determinante

Für die Integraldarstellung (4.40) der klassischen S-Matrix wird die Determinante (4.41)

$$D(\beta,\varphi) = \mathrm{Det} \left| \frac{\partial(q_J, q_m)}{\partial(\beta,\varphi)} \right| = \frac{\delta q_m}{\delta\varphi} \frac{\delta q_J}{\delta\beta} - \frac{\delta q_m}{\delta\beta} \frac{\delta q_J}{\delta\varphi} \quad \text{(II.39)}$$

benötigt. Die Ableitungen in (II.39) schreiben sich unter

Berücksichtigung von (4.32)

$$q_J = \frac{\partial}{\partial J} F_2(\beta, \varphi, J(\beta,\varphi), m(\beta,\varphi)) \qquad \text{(II.40)}$$

(analog für q_m) als

$$\frac{\delta q_J}{\delta \beta} = \frac{\partial q_J}{\partial \beta} + \frac{\partial q_J}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \beta} + \frac{\partial q_J}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial \beta} \qquad \text{(II.41)}$$

und entsprechend für $\delta q_J/\delta\varphi$, $\delta q_m/\partial\beta$ und $\delta q_m/\delta\varphi$. Die partielle Ableitung von q_J nach β auf der rechten Seite von (II.41) bedeutet, daß zusätzlich zu φ (wie in $\delta q_J/\delta\beta$) auch J und m festgehalten werden.

Die benötigten partiellen Ableitungen lauten explizit

$$\frac{\partial q_J}{\partial \varphi} = 0 \quad , \qquad \text{(II.42)}$$

$$\frac{\partial q_m}{\partial \varphi} = -1 \quad , \qquad \text{(II.43)}$$

$$\frac{\partial q_J}{\partial \beta} = \frac{J}{\sqrt{J^2 - m^2/\sin^2\beta}} \quad , \qquad \text{(II.44)}$$

$$\frac{\partial q_m}{\partial \beta} = -\frac{m}{\sqrt{J^2 \sin^2\beta - m^2}\,\sin\beta} \quad , \qquad \text{(II.45)}$$

$$\frac{\partial q_J}{\partial m} = -\frac{m\,J\cos\beta}{\sqrt{J^2 \sin^2\beta - m^2}\,(J^2-m^2)} \quad , \qquad \text{(II.46)}$$

$$\frac{\partial q_m}{\partial m} = \frac{J^2\cos\beta}{\sqrt{J^2 \sin^2\beta - m^2}\,(J^2-m^2)} \quad , \qquad \text{(II.47)}$$

$$\frac{\partial q_J}{\partial J} = \frac{m^2\cos\beta}{\sqrt{J^2 \sin^2\beta - m^2}\,(J^2-m^2)} \quad , \qquad \text{(II.48)}$$

$$\frac{\partial q_m}{\partial J} = \frac{\partial q_J}{\partial m} \quad , \tag{II.49}$$

$$\frac{\partial m}{\partial \varphi} = -6\bar{Q}_2 \sin\beta \left[\cos\beta \cos\varphi\, X_3(\infty) + \sin\beta \times (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, X_1(\infty)\right] \quad , \tag{II.50}$$

$$\frac{\partial m}{\partial \beta} = -6\bar{Q}_2 \sin\varphi \left[(\cos^2\beta - \sin^2\beta)\, X_3(\infty) + 2 \sin\beta \cos\beta \cos\varphi\, X_1(\infty)\right] \quad , \tag{II.51}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi} = \frac{1}{J}\left[\frac{m}{\sin^2\beta}\frac{\partial m}{\partial \varphi} + p_\beta\left[6 \sin\beta \cos\beta \sin\varphi \times \cos\varphi\, X_1(\infty) - 3 \sin\varphi\,(\sin^2\beta - \cos^2\beta)\, X_3(\infty)\right]\right] , \tag{II.52}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = \frac{3}{J}\left[p_{\bar\beta}\left[(\cos^2\beta - \sin^2\beta)(X_2(\infty) - \cos^2\varphi\, X_1(\infty)) + 4 \sin\beta \cos\beta \cos\varphi\, X_3(\infty)\right] + S \sin\varphi\left[\cos\varphi \cos\beta\, X_1(\infty) - \sin\beta\, X_3(\infty)\right]\right] . \tag{II.53}$$

Hier ist $p_\beta = 2\bar{Q}_2\bar{p}_\beta$, $p_\varphi = 2\bar{Q}_2\bar{p}_\varphi$ und $S = p_\varphi/\sin\beta$ verwendet worden. Beachtet man noch die Relationen

$$\frac{\partial q_J}{\partial m}\frac{\partial q_m}{\partial J} - \frac{\partial q_J}{\partial J}\frac{\partial q_m}{\partial m} = 0 \quad , \tag{II.54}$$

$$\frac{\partial q_J}{\partial J}\frac{\partial q_m}{\partial \beta} - \frac{\partial q_J}{\partial \beta}\frac{\partial q_m}{\partial J} = \frac{m \cos\beta}{(J^2 - m^2)\sin\beta} \quad , \tag{II.55}$$

$$\frac{\partial q_J}{\partial m}\frac{\partial q_m}{\partial \beta} - \frac{\partial q_J}{\partial \beta}\frac{\partial q_m}{\partial m} = -\frac{J \cos\beta}{(J^2 - m^2)\sin\beta} \quad , \tag{II.56}$$

erhält man nach Einsetzen aller partiellen Ableitungen (II.42)-(II.53) in (II.39)

$$D(\beta,\varphi) = -\frac{\delta q_J}{\delta \beta} + \frac{\partial m}{\partial \varphi}\,\frac{J\cos\beta}{(J^2-m^2)\sin\beta} - \frac{\partial J}{\partial \varphi}\,\frac{m\cos\beta}{(J^2-m^2)\sin\beta}$$

$$= \frac{1}{(J^2-S^2\sin^2\beta)\sqrt{J^2-S^2}\sqrt{p_\beta^2+S^2}} \times \qquad \text{(II.57)}$$

$$\left[\sqrt{J^2-S^2}\cos\beta\left[p_\beta\cdot S\,\frac{\partial p_\beta}{\partial\varphi} - p_\beta^2\,\frac{\partial S}{\partial\varphi} - \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial\varphi}\sqrt{p_\beta^2+S^2}\right]\right.$$

$$+\sqrt{p_\beta^2+S^2}\;J\left[J^2+S^2(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+S\sin\beta\cos\beta\,\frac{\partial S}{\partial\beta}\right]$$

$$\left.-S^2\cos\beta\sin\beta\left[p_\beta\frac{\partial S}{\partial\varphi}+S\,\frac{\partial p_\beta}{\partial\varphi}\right]\right] .$$

Hier ist für J stets (4.45) einzusetzen. Eine weitere Vereinfachnung von (II.57) erscheint nicht möglich, da vor den ersten beiden Summanden in (II.57) verschiedene nicht zu vereinfachende Wurzelausdrücke stehen.

II.5. Der "sudden" Grenzfall für die planare Näherung

In diesem Abschnitt wird der "sudden" Grenzfall für die planare Näherung in Kapitel 5 behandelt.

Die Lösung der Bewegungsgleichnungen (5.5)-(5.8) führt im "sudden" Grenzfall auf

$$p = p_c = \sqrt{1 - \frac{2}{r} - \frac{\varepsilon^2-1}{r^2}} \,, \qquad \text{(II.58)}$$

$$r = r_c \,, \qquad \text{(II.59)}$$

$$q(r) = q_1 + \vartheta(r) \,. \qquad \text{(II.60)}$$

Hier ist ϑ der Bahnwinkel (II.3). Damit erhält man für $\bar{J}$

$$\bar{J}(r) = 3\left[(\cos^2 q_1 - \sin^2 q_1)\, X_3(r) + \sin q_1 \cos q_1 \left[\frac{1+p-R_2(r)}{\varepsilon^2-1} - 2X_1(r)\right]\right] + \bar{J}_1 , \tag{II.61}$$

wobei $X_1(r), X_3(r)$ und $R_2(r)$ in (II.9),(II.11) und (II.13) definiert sind. Der Spin $\bar{J}$ (II.61) ist für den Spezialfall $\varphi = \pi$ identisch mit $\bar{p}_\beta$ (II.7). Die Phase (5.17) führt mit den gleichen Gründen , die in Abschnitt II.2 angeführt worden sind , auf

$$\Delta = \bar{\delta} = -4\bar{Q}_2 \int_{r_T}^{\infty} \frac{dr}{r^3\, p_c} P_2(\cos q)$$

$$= -2\bar{Q}_2 P_2(\cos q_1) \frac{1}{\varepsilon^2-1} (2 - R_2(\infty)) + 3\bar{Q}_2 \times \tag{II.62}$$

$$\times(\cos^2 q_1 - \sin^2 q_1)\, X_1(\infty) + 6\bar{Q}_2 \sin q_1 \cos q_1 X_3(\infty).$$

Die Phase (II.62) ist die Spezialisierung von (II.32) für $\varphi = \pi$. Die reduzierte Winkelvariable $\bar{q}$ lautet asymptotisch

$$\bar{q} = q_1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2} = \tilde{q}_1 \quad , \tag{II.63}$$

wobei Θ der Coulombstreuwinkel und $\tilde{q}_1$ der verschobene Winkel (5.20) sind. Damit wird die Ableitung von $\bar{q}$ nach q_1 identisch Eins. Die S-Matrix (5.19) lautet somit im "sudden" Grenzfall

$$S^{ID}_{J_2 O} = \frac{\sqrt{2J_2+1}}{2} \int_0^{\pi} dq_1\, P_{J_2}(\cos\bar{q})\, |\sin\bar{q}|\, e^{i\bar{\delta}} \quad . \tag{II.64}$$

Wir schreiben nunn die Phase (II.62) und die S-Matrix

(II.64) für den Vergleich mit [43c] als Funktion von $\bar{q}$. Mit

$$\varepsilon = \frac{1}{\sin(\Theta/2)} \quad , \tag{II.65}$$

$$X_1(\infty) = \frac{1}{3}\sin^2\frac{\Theta}{2}\left[1-2\sin^2\frac{\Theta}{2}\right] + \frac{2-R_2(\infty)}{2(\varepsilon^2-1)} \quad , \tag{II.66}$$

$$X_3(\infty) = \frac{2}{3}\sin^3\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2} \tag{II.67}$$

und (II.63) folgt

$$\bar{\delta} = -\bar{Q}_2\, J_{20}(\Theta)\, P_2(\cos\bar{q}) + \frac{3}{2}\bar{Q}_2\, J_{22}(\Theta)\sin^2\bar{q} \quad . \tag{II.68}$$

Hier sind die bei Alder und Winther [43c] verwendeten Ausdrücke

$$J_{20}(\Theta) = \sin^2\frac{\Theta}{2} + \frac{2-R_2(\infty)}{2(\varepsilon^2-1)} \quad , \tag{II.69}$$

$$J_{22}(\Theta) = -\frac{1}{3}\sin^2\frac{\Theta}{2} + \frac{2-R_2(\infty)}{2(\varepsilon^2-1)} \tag{II.70}$$

und

$$R_2(\infty) = (\pi-\Theta)\tan\frac{\Theta}{2} \tag{II.71}$$

eingesetzt worden. Die S-Matrix (II.64) lautet dann

$$S^{ID}_{J_2O} = \frac{\sqrt{2J_2+1}}{2}\int_0^{\pi} d\bar{q}\, P_2(\cos\bar{q})\sin\bar{q}\; e^{i\bar{\delta}} \quad . \tag{II.72}$$

Wir betrachten nun den Ausdruck von Alder und Winther für den "sudden" Grenzfall (5.29). In Abschnitt II.3 wurde

bereits gezeigt, daß sich die Phase in (5.29) [43c] auf die Form δ (4.25) umschreiben läßt. Setzt man in den expliziten Ausdruck der Phase in (5.29) die Kugelfunktionen ein, erhält man

$$\delta(\bar{q}, \alpha) = -\bar{Q}_2 J_{20}(\Theta) P_2(\cos\bar{q}) + \frac{3}{2}\bar{Q}_2 J_{22}(\Theta) \sin^2\bar{q} \cos 2\alpha \tag{II.73}$$

Für $\alpha = 0$ geht δ (II.73) in $\bar{\delta}$ (II.68) über. In $\bar{\delta}$ fehlt daher die räumliche Orientierungsmöglichkeit des Rotators. Mit

$$y = \frac{3}{2}\bar{Q}_2 J_{22}(\Theta) \sin^2\bar{q} \tag{II.74}$$

lautet der Alder-Winther Ausdruck (5.29)

$$a_{J_2M_2} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} d\bar{q} \sin\bar{q} \int_0^{2\pi} d\alpha\, Y_{J_2M_2}(\bar{q}, \alpha) \exp\left[-i\bar{Q}_2 J_{20}(\Theta) P_2(\cos\bar{q}) + i y \cos 2\alpha\right] \tag{II.75}$$

Die Integration über α führt schließlich auf (5.31).

Anhang III : DIE LÖSUNG DER STABILITÄTSGLEICHNUNGEN

In diesem Anhang soll die Integration der Stabilitätsgleichnungen, die zur Berechnung der Amplitudenfaktoren $\partial J/\partial q_1$ (uniforme Airynäherung, Anhang I) und $\partial \bar{q}/\partial q_1$ (Integraldarstellung) in Abschnitt 5.1 notwendig ist, beschrieben werden. Die Stabilitätsgleichungen bezüglich q_1 erhält man durch die Ableitung der Bewegungsgleichungen nach dem Anfangswinkel q_1.

In Matrixschreibweise lautet das System der Stabilitätsgleichungen

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{r} \\ \tilde{J} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H_{rp} & -H_{rr} & -H_{rJ} & -H_{rq} \\ H_{pp} & H_{pr} & H_{pJ} & H_{pq} \\ -H_{qp} & -H_{qr} & -H_{qJ} & -H_{qq} \\ H_{Jp} & H_{Jr} & H_{JJ} & H_{Jq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{r} \\ \tilde{J} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} \qquad \text{(III.1)}$$

Die Schlangenlinien über den Variablen bedeuten hier Ableitungen nach q_1. Die Kurzform H_{kl} meint partielle Ableitungen der Hamiltonfunktion nach den Variablen k und l. Diese berechnen sich zu

$$H_{rp} = 0 \qquad \text{(III.2)}$$

$$H_{rr} = \frac{3}{\eta^2 \bar{r}^4}\,(I+2\bar{Q}_2\bar{J})^2 + \frac{2}{\bar{r}^3} + \frac{6\Lambda}{\bar{r}^5}\,(3\cos^2 q - 1) \qquad \text{(III.3)}$$

$$H_{rJ} = -\frac{2}{\eta^2 \bar{r}^3}\,(I+2\bar{Q}_2\bar{J}) \qquad \text{(III.4)}$$

$$H_{rq} = \frac{9\Lambda}{\bar{r}^4}\,\sin q\,\cos q \qquad \text{(III.5)}$$

$$H_{pp} = 1 \tag{III.6}$$

$$H_{pJ} = 0 \tag{III.7}$$

$$H_{pq} = 0 \tag{III.8}$$

$$H_{qJ} = 0 \tag{III.9}$$

$$H_{qq} = \frac{3\Lambda}{\bar{r}^3} \left(\sin^2 q - \cos^2 q \right) \tag{III.10}$$

$$H_{JJ} = \frac{1}{\eta^2 \bar{r}^2} + \frac{\xi}{4\bar{Q}_2 \eta} \quad . \tag{III.11}$$

Das Gleichungssystem (III.1) wird parallel zu den Bewegungsgleichungen (5.5)-(5.8) mit den Anfangsbedingungen im Punkt "1"

$$\tilde{p} = \tilde{r} = \tilde{J} = 0 \ , \ \tilde{q} = 1 \tag{III.12}$$

integriert. Als Resultat erhält man $\partial J / \partial q_1$ und $\partial q / \partial q_1$

Für die Amplitude der Integraldarstellung benötigt man die Ableitung der reduzierten Winkelvariablen $\bar{q}$ nach q_1

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial q_1} = \frac{\partial q}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_1} \int_T^t dt' \, \frac{\partial H}{\partial J} \tag{III.13}$$

(siehe (3.21)) und für den zweiten Summanden müssen daher noch die Stabilitätsgleichungen der elastischen Bahnen zum Spin $\bar{J}$ integriert werden. Grundlage ist die Hamiltonfunktion ohne inelastische Wechselwirkungsterme. Daraus berechnen sich die H_{kl} zu

$$H_{rr} = \frac{2}{\bar{r}^3} + \frac{3}{\eta_J^2 \bar{r}^4} \left(1 + 2\bar{Q}_{2J} \bar{J} \right)^2 \tag{III.14}$$

$$H_{rJ} = - \frac{2}{\eta_J^2 \bar{r}^3} (I + 2\bar{Q}_{2J}\bar{J}) \qquad \text{(III.15)}$$

$$H_{pp} = 1 \qquad \text{(III.16)}$$

$$H_{JJ} = \frac{1}{\eta_J^2 \bar{r}^2} + \frac{\xi}{4\bar{Q}_{2J}\eta_J} \; . \qquad \text{(III.17)}$$

Alle anderen H_{kl} sind Null. Die Integration des Gleichungssystems (III.1) wird vom Umkehrpunkt mit $\tau = 0$ bis zum asymptotischen Endpunkt $\tau = t$ der klassischen Bahnen im Ausgangskanal mit den Anfangsbedingungen

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_1} = 0 \text{ , da } \bar{p} = 0 \text{ für alle } q_1 \qquad \text{(III.18)}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial \varepsilon_J}{\partial q_1} \qquad \text{(III.19)}$$

$$\frac{\partial q'}{\partial q_1} = 0 \qquad \text{(III.20)}$$

durchgeführt. In (III.20) ist q' die Winkelvariable der elastischen Coulombbahn mit dem Spin $\bar{J}$, die bei $t = T$ unabhängig von q_1 stets gleich Null ist. Die Ableitung $\partial \bar{J} / \partial q_1$ ist entlang der elastischen Bahn konstant und berechnet sich aus der Lösung der Stabilitätsgleichnungen für die volle Bewegung (mit (III.2)-(III.11).

Literaturverzeichnis

(1) J.Knoll, R.Schaeffer
Phys. Lett. 52B(1974)131

(2) J.Knoll, R.Schaeffer
Ann. Phys. 97(1976)307

(3) T.Koeling, R.A.Malfliet
Phys. Rep. C22(1975)182

(4) N.Rowley, C.Marty
J. Phys G2(1976)L217

(5) Y.Avishai , J.Knoll
Z. Phys. A279(1976)415

(6) S.Landowne, C.H.Dasso, B.S.Nilsson,
R.A.Broglia, Aa.Winther
Nucl. Phys. A259(1976)99

(7) D.M.Brink, N.Takigawa
Nucl. Phys. A279(1977)159

(8) D.M.Brink
J. de Phys. 37(1976)C5

(9) P.Fröbrich, P.Kaufmann, K.Möhring
Proc.Int.Conf. on Nuclear Structure,
Tokio,1977,p.578

(10) P.Fröbrich, P.Kaufmann
S.Afr.J.Phys. 1(1978)143

(11) P.Fröbrich, P.Kaufmann
Nucl. Phys. A307(1978)297

(12) P.Fröbrich, P.Kaufmann, K.Möhring
Proc.Int.Symp. on Nuclear Reaction Models,
Balatonfüred,1977,ed. L.P.Csernai,
Budapest 1978, p.331

(13) J.Knoll, R.Schaeffer
Phys. Rep. C31(1977)159

(14) R.A.Marcus
J. Chem. Phys. 54(1971)3965

(15) J.N.L.Connor, R.A.Marcus
J. Chem. Phys. 55(1971)5636

(16) R.A.Marcus
J. Chem. Phys. 56(1972)311

(17) R.A.Marcus
J. Chem. Phys. 56(1972)3548

(18) R.A.Marcus
J. Chem. Phys. 57(1972)4903

(19) R.A.Marcus
J. Chem. Phys. 59(1973)5135

(20) J.R.Stine, R.A.Marcus
J. Chem. Phys. 59(1973)5145

(21) W.H.Wong, R.A.Marcus
J. Chem. Phys. 55(1971)5663

(22) H.Kreek, R.A.Marcus
J. Chem. Phys. 61(1974)3308

(23) H.Kreek, R.L.Ellis, R.A.Marcus
J. Chem. Phys. 61(1974)4540

(24) H.Kreek, R.L.Ellis, R.A.Marcus
J. Chem. Phys. 62(1975)913

(25) W.H.Miller
J. Chem. Phys. 53(1970)1949

(26) W.H.Miller
J. Chem. Phys. 53(1970)3578

(27) W.H.Miller
J. Chem. Phys. 54(1971)5386

(28) S.D.Augustin, W.H.Miller
J. Chem. Phys. 61(1974)3155

(29) W.H.Miller
Adv. Chem. Phys. 25(1974)69

(30) S.Levit, U.Smilansky, D.Pelte
Phys. Lett. 53B(1974)39

(31) S.Levit, U.Smilansky
Preprint,WIS-76/22-Ph,Rehovot,Israel,1976

(32) S.Levit, U.Smilansky
Ann. Phys. 103(1977)198

(33) S.Levit, U.Smilansky
Ann. Phys. 108(1977)165

(34) S.Levit, K.Möhring, U.Smilansky, T.Dreyfus
Ann. Phys. 114(1978)223

(35) K.Möhring, S.Levit, U.Smilansky
to be published in Ann. Phys.

(36) H.Massmann, P.Ring, J.O.Rasmussen
Phys. Lett. 57B(1975)417

(37) S.Levit, U.Smilansky
Nucl. Phys. A315(1979)205

(38) H.Massmann, J.O.Rasmussen
Nucl. Phys. A243(1975)155

(39) M.W.Guidry, H.Massmann, R.Donangelo, J.O.Rasmussen
Nucl. Phys. A274(1976)183

(40) R.Donangelo, M.W.Guidry, J.P.Boisson, J.O.Rasmussen
Phys. Lett. 64B(1976)377

(41) R.Donangelo
Thesis,unpublished,Berkeley,1977

(42) M.W.Guidry, R.Donangelo, J.O.Rasmussen, J.P.Boisson
Nucl. Phys. A295(1978)482

(43) K.Alder, A.Winther
"Coulomb Excitation",Perspectives in Physics,
Academic Press, New York/London,1966
a) Seite 303 ff.
b) Seite 2 f.
c) Seite 209 ff.

(44) P.Fröbrich, Q.K.K.Liu, K.Möhring
Nucl. Phys. A290(1977)218

(45) Q.K.K.Liu, P.Fröbrich
private Mitteilung

(46) A.J.Baltz,N.K.Glendenning,S.K.Kauffmann,K.Pruess
Nucl. Phys. A327(1979)221

(47) R.A.Malfliet, S.Landowne, V.Rostokin
Phys. Lett. 44B(1973)238

(48) R.A.Broglia, S.Landowne, R.A.Malfliet,
V.Rostokin, Aa.Winther
Phys. Rep. C11(1974)2

(49) S.Y.Lee, N.Takigawa, C.Marty
Nucl. Phys. A308(1978)161
S.Y.Lee, N.Takigawa
Nucl. Phys. A308(1978)189

(50) R.Vandenbosch, M.P.Webb, T.D.Thomas, M.S.Zisman
Nucl. Phys. A269(1976)210

(51) R.Vandenbosch, M.P.Webb, T.D.Thomas,
S.W.Yates, A.M.Friedman
Phys. Rev. C13(1976)1893

(52) W.U.Schröder, J.R.Birkelund, J.R.Huizenga,
K.L.Wolf, J.P.Unik, V.E.Viola
Phys. Rev. Lett. 36(1976)514

(53) J.R.Birkelund, J.R.Huizenga, H.Freiesleben,
K.L.Wolf, J.P.Unik, V.E.Viola
Phys. Rev. C13(1976)133

(54) W.E.Frahn
Nucl. Phys. A302(1978)267

(55) W.E.Frahn
Nucl. Phys. A302(1978)281

(56) W.E.Frahn
Nucl. Phys. A302(1978)301

(57) W.E.Frahn, T.F.Hill
Z. Phys. A285(1978)315

(58) J.M.Bowman, Ki-Tung Lee
Chem. Phys. Lett. 60(1979)212

(59) P.Fröbrich, P.Kaufmann, Q.K.K.Liu,
H.Massmann, K.Möhring
Proc.Int.Conf. on Nuclear Collisions and their
Microscopic Descriptions,Bled,1977,
Fizika,vol.9,suppl.2,p.67

(60) H.Goldstein
"Klassische Mechanik", Akademische Verlagsanstalt,
Frankfurt am Main,1972

(61) W.Brückner, J.G.Merdinger, D.Pelte,
U.Smilansky, K.Traxel
Phys. Rev. Lett. 30(1973)57

(62) C.E.Thorn, M.J.LeVine, J.J.Kolata, C.Flaum,
P.D.Bond, J.C.Sens
Phys. Rev. Lett. 38(1977)384

(63) B.T.Kim
Phys. Lett. 80B(1979)353

(64) M.W.Guidry, P.A.Butler, R.Donangelo, E.Grosse,
Y.El Masri, I.Y.Lee, F.S.Stephens, R.M.Diamond,
L.L.Riedinger, C.R.Bingham, A.C.Kahler, J.A.Vrba,
E.L.Robinson, N.R.Johnson
Phys. Rev. Lett. 40(1978)1016

(65) K.Möhring
private Mitteilung

(66) J.Stine, R.A.Marcus
Chem. Phys. Lett. 15(1972)536

(67) W.H.Miller, T.F.George
J. Chem. Phys. 56(1972)5668

(68) T.F.George, W.H.Miller
J. Chem. Phys. 57(1972)2458

(69) J.D.Doll, T.F.George, W.H.Miller
J. Chem. Phys. 58(1973)1343

(70) Y.W.Lin, T.F.George
J. Chem. Phys. 61(1974)1510

(71) C.W.Curdy, W.H.Miller
J. Chem. Phys. 67(1977)463

(72) V.Khare
J. Chem. Phys. 67(1977)3897

(73) P.Colombani, J.C.Jacmart, N.Poffé, M.Riou,
C.Stéphan, P.P.Singh, A.Weidinger
Phys. Lett. 48(1974)315

(74) P.Fröbrich, Q.K.K.Liu, K.Möhring
Phys. Rev. C13(1976)430

(75) W.G.Love, T.Teresawa, G.R.Satchler
Phys. Rev. Lett. 39(1977)6

(76) A.J.Baltz, S.K.Kauffmann, N.K.Glendenning,
K.Pruess
Phys. Rev. Lett. 40(1978)20

(77) P.Doll, M.Bini, D.L.Hendrie, S.K.Kauffmann,
J.Mahoney, A.Menchaca-Rocha, D.K.Scott,
T.J.M.Simons, K. van Bibber, Y.P.Viyogi,
H.Wieman, A.J.Baltz
Phys. Lett. 76B(1978)556

(78) J.N.Connor, H.R.Mayne
Mol. Phys. 37(1979)1

(79) J.N.Connor, H.R.Mayne
Mol. Phys. 37(1979)15

(80) M.V.Berry, K.E.Mount
Rep. Prog. Phys. 35(1972)315

(81) L.D.Tolsma
Phys. Rev. C20(1979)592

(82) M.Abramowitz, I.A.Stegun
Handbook of Mathematical Functions,
Dover Publications,Inc.,New York,p.355ff.

Diese Arbeit ist in der Arbeitsgruppe Theoretische Physik des Bereichs Kern- und Strahlenphysik des Hahn-Meitner-Instituts für Kernforschung in Berlin angefertigt worden.

B. Bohne und D. Schoening haben mich bei der Lösung der numerischen Probleme unterstützt.
Ihnen und vor allen P. Fröbrich und K. Möhring für die Stellung des Themas und für die überaus hilfreiche und anregende Zusammenarbeit sei hier von Herzen gedankt.

LEBENSLAUF

Am 29.7.1952 wurde ich als ältestes von drei Kindern des Ingenieurs Robert Kaufmann und seiner Frau Margarete geb. Klein in Berlin-Pankow geboren. Von September 1959 bis Oktober 1967 besuchte ich die 17. Oberschule in Berlin-Blankenfelde. Nach der Übersiedlung nach Westberlin im Oktober 1967 besuchte ich das Ranke-Gymnasium in Berlin-Wedding und legte dort nach Überspringen der 12. Klasse im Januar 1971 das Abitur ab.

Im Sommersemester 1971 begann ich an der Technischen Universität Berlin das Studium der Physik. Ich wechselte zum Wintersemester 1972 an die Freie Universität Berlin, wo ich im April 1973 das Vordiplom erwarb. Im April 1974 begann ich bei Herrn Prof. J. Eichler am Hahn-Meitner-Institut für Kernforschung, Bereich Kernphysik, Berlin mit meiner Diplomarbeit. Im April 1976 legte ich mit der Arbeit "Relativistische Korrekturen zu den Elektronenkorrelationsdiagrammen für das Ion-Atom-Stoßproblem" das Diplom in Theoretischer Physik ab. Danach blieb ich als wissenschaftlicher Angestellter im Hahn-Meitner-Institut und begann in der Arbeitsgruppe Theoretische Physik des Bereichs Kernphysik mit meiner Doktorarbeit.